

VARIEDAD DE INFORMACIÓN ESTADÍSTICA q -EXPONENCIAL

Héctor Román Quiceno Echavarría

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Junio 2010

VARIEDAD DE INFORMACIÓN ESTADÍSTICA q -EXPONENCIAL

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Héctor Román Quiceno Echavarría

Director

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa

Doctor en Ciencias Matemáticas



Escuela de Ciencias y Humanidades

Departamento de Ciencias Básicas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Medellín

Junio 2010

Nota de aceptación

Coordinador de la Maestría

Director del proyecto

Ciudad y fecha (día, mes, año):

A mis hijos Miguel Ángel e
Isabella fuentes inagotables de
inspiración y luz en mi vida

Agradecimientos

La realización de este trabajo es fruto del esfuerzo y acompañamiento de muchas personas que estuvieron a mi lado en forma incondicional. En este sentido debo agradecer a:

Mis padres Martha y Héctor, quienes siempre me han orientado y apoyado hasta en las más locas ideas y es gracias a ellos que estoy escribiendo esto.

A Henry Laniado Rodas y Hernán Monsalve quienes como profesores de pregrado y amigos, sembraron en mí la semilla del formalismo matemático y la investigación, y se convirtieron en guías para el extenso camino del conocimiento en matemáticas.

Al profesor Carlos Cartagena, pues de sus exposiciones en el seminario de análisis funcional, nacieron las ideas que se desarrollaron en el presente trabajo de investigación.

Al Dr. Gabriel Ignacio Loaiza, por su excelente asesoría y paciencia en todos los aspectos; además, gracias a sus enseñanzas y formalismo teórico, me he enamorado del análisis matemático.

Resumen

En el conjunto \mathfrak{M}_μ , de densidades estrictamente positivas y equivalentes según una medida de probabilidad μ , se presenta la utilización de las q -deformaciones según Tsallis para la construcción de una variedad estadística modelada sobre espacios de Orlicz. Para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$ se construye un mapeo $\sigma_{q,p}$ de un subconjunto $\mathcal{U}_{q,p}$ de \mathfrak{M}_μ en un subconjunto abierto $\mathcal{V}_{q,p}$ de un espacio de Orlicz asociados a p . La familia $(\mathcal{U}_{q,p}, \sigma_{q,p})_{p \in \mathfrak{M}_\mu}$ constituye un C^∞ -atlas para \mathfrak{M}_μ . Dicho atlas induce una topología en \mathfrak{M}_μ ; la cual es más fuerte que la topología de $L^1(\mu)$ y coincide con la topología de la e -convergencia en las sucesiones. Como consecuencia de esta construcción, cada modelo paramétrico q -exponencial está identificado con el espacio tangente de \mathfrak{M}_μ y las funciones coordenadas $\sigma_{q,p}$ quedan, en forma natural, definidas en términos de las f -divergencias o entropías relativas según Tsallis.

Índice general

Introducción	1
1. Propuesta inicial	5
1.1. Objetivos	5
2. Preliminares	7
2.1. Espacios de funciones de Orlicz	7
2.2. Funciones q -deformadas	9
2.2.1. Exponenciales y logaritmos deformados	10
2.2.2. Propiedades y álgebra de q -deformadas	13
2.2.3. Otras q -deformaciones	19
2.3. Geometría diferencial	24
2.3.1. Diferenciabilidad de una función entre espacios de Banach	24
2.3.2. Variedades de Banach	26
2.4. Variedad de información de Pistone y Sempi	28
3. Variedad de información q-exponencial	33
3.1. Introducción	33
3.2. Modelo q -exponencial	34
3.3. Analiticidad del Funcional acumulante	41
3.3.1. Mapeos analíticos entre espacios de Banach	41
3.3.2. La función exponencial $exp_{p,a}$	43
3.3.3. Analiticidad del funcional acumulante	46
3.4. Estructura de variedad q -exponencial	49
4. Haz tangente y entropía Relativa	57

4.1. El Haz tangente	58
4.2. Entropía relativa	64
Conclusiones	67
Problemas abiertos	69
Bibliografía	71

Introducción

Sin duda la búsqueda de enfoques interdisciplinarios ha servido para la construcción de novedosos marcos teóricos, en los cuales la labor de síntesis y generalización de ideas se ha vuelto útil como modelo para una amplia gama de aplicaciones, tanto teóricas como prácticas. En la historia de las matemáticas se encuentran ejemplos sobresalientes, como el surgimiento del cálculo infinitesimal, el desarrollo del análisis matemático, la geometría diferencial, etc. Muy recientemente se ha presentado la conjunción de varias ramas de las matemáticas como son el análisis funcional, la geometría diferencial y la estadística. Particularmente en el ámbito de los espacios de funciones de Orlicz se han visto aplicaciones, con base en la geometría diferencial, ideas relacionadas con la estadística y la teoría de la información. Este desarrollo comenzó en 1945 con C.R. Rao [6] y H. Jeffeys [13], quienes dieron una interpretación de modelos de la teoría de la información a la luz de la geometría riemanianna en modelos estadísticos parametrizados. Para las correspondientes familias de funciones de densidad de probabilidad parametrizadas se establece una estructura de variedad y desde 1985 algunas importantes aplicaciones han sido estudiadas [27], [28].

Un referente importante para esta propuesta, es el artículo publicado en 1995 por G. Pistone y C. Sempì [21], titulado *An infinite-dimensional geometric structure on the space of all the probability measures equivalent to a given one*. En dicho trabajo, se construye una variedad de Banach sobre las funciones de densidad de probabilidad no parametrizadas, la cual permite interpretar la entropía clásica relativa a dos funciones de densidad de probabilidad que estén conectadas por un modelo exponencial. Dicha variedad es conocida en algunos artículos como variedad de información estadística de Pistone y Sempì, y ha permitido logros en el estudio de los estados físicos de sistemas clásicos y cuánticos en trabajos que aparecen después de 2004 ([26], [3]), donde espacios de Orlicz son asociados a álgebras de Von Newman de operadores sobre espacios de Hilbert. El trabajo de Pistone y Sempì desarrolló una teoría de los mejores estimadores (de mínima varianza) entre todos los estimadores localmente insesgados para la estimación no paramétrica en la teoría estadística clásica.

De otro lado, G. Kaniadakis ([8], [9], [10] y [11]) basado en argumentos de física y relatividad especial definió una función exponencial k -deformada, donde k es un parámetro real entre -1 y 1 . Previamente, se habían introducido funciones exponenciales q -deformadas, siendo q un parámetro real distinto de 1 , y de igual forma, se han definido varios tipos de deformaciones de la función exponencial que permitieron desarrollos importantes en

termoestadística generalizada; ésta se basa en una extensión no clásica del funcional de entropía de Shannon-Boltzmann-Gibbs, como es el caso del formalismo en termoestadística planteado por Constantino Tsallis [30] en 1988. Precisamente, Tsallis introdujo un nuevo concepto de entropía y conjuntamente nuevas restricciones para el correspondiente funcional, el cual se utiliza para describir sistemas que poseen propiedades no extensivas. Esta formulación generalizada de entropía depende de un parámetro real llamado parámetro de no extensividad, q , el cual se propone de acuerdo a las condiciones específicas que describen el sistema. Para que el formalismo de Tsallis constituya una teoría física completa cerrada, es necesario determinar, en el marco de la mecánica no extensiva, el valor particular (o valores particulares) de q para un sistema físico dado. En el presente trabajo se considera la entropía relativa asociada a funciones de densidad de probabilidad en un sistema no extensivo, según Tsallis, que sea subaditivo; lo cual ocurre cuando $0 < q < 1$.

En general, las deformaciones de la función exponencial siempre dependen de un parámetro real y Naudts [18] presenta un estudio general que denominó κ -deformaciones; de éstas son casos particulares las k -deformaciones según Kaniadakis y las q -deformaciones. También, en la última década, muchos tópicos en matemáticas se han desarrollado considerando casos especiales de κ -deformaciones, como la q -transformada de Laplace, funciones q -trigonométricas, q -waveletes y otros que se pueden consultar en [4]. El op

En 2009, G. Pistone [22] publicó un artículo, en el cual presenta una generalización de su trabajo de 1995; contruyendo una variedad basada en deformaciones de la función exponencial según Kaniadakis y un tipo de conexión k -exponencial, que permitió describir la entropía relativa según Kaniadakis.

En el presente trabajo se propone la generalización de la variedad de información estadística de Pistone y Sempi en forma análoga al trabajo expuesto en [22], pero usando, en lugar de la k -deformación de Kaniadakis, una q -deformación. En este sentido se debe construir una variedad de Banach sobre las funciones de densidad de probabilidad no parametrizadas, mediante relaciones dadas en términos de q -exponenciales (como extensión de modelos exponenciales) para funciones de densidad de probabilidad. Además, la variedad debe permitir caracterizar la entropía relativa, según Tsallis, a dos funciones de densidad de probabilidad que estén conectadas por un modelo q -exponencial. También es necesario describir el espacio tangente mediante la idea de funciones conectadas q -exponencialmente.

Vale la pena resaltar que, dentro de los aportes más relevantes a la estructura de la mecánica estadística clásica, se encuentra la definición de diferentes funcionales para describir la entropía de un sistema. Puede citarse, como ejemplos de tales propuestas, los funcionales de entropía de Shannon y Kolmogorov (relacionados con teoría de la información en sistemas clásicos); la entropía de Von Newnman (equivalente a la de Shannon en sistemas cuánticos); la entropía S_R de Renyí, la cual logra un gran avance respecto a las anteriores, dado que caracteriza diferentes tipos de entropías haciendo uso de un índice entrópico α . Casos similares están dados por la entropía S_κ de Kaniadakis relacionada con estadística relativista, y la entropía S_q de Tsallis, la cual se aplica a fenómenos donde la evidencia experimental muestra que no se cumple el principio de extensividad de la entropía clásica para sistemas probabilísticamente independientes. El uso del funcional de entropía

de Tsallis ha dado muy buenos resultados en la mecánica estadística generalizada (no extensivo), con apoyo en evidencia experimental. Si bien el trabajo de Pistone en 2009 [22] permite extender los resultados de la variedad de información de Pistone y Sempi, del funcional de entropía de Boltzman-Gibbs al de Kaniadiakis, no lo hace así para el funcional de entropía de Tsallis. Este es precisamente el objeto principal de esta tesis.

Esta memoria de tesis se presenta de la siguiente manera. El primer capítulo presenta los objetivos del trabajo. El segundo capítulo es de preliminares matemáticos, donde se exponen conceptos y resultados necesarios para el desarrollo del trabajo. Se introducen los espacios de Orlicz, q -deformaciones, conceptos básicos de geometría diferencial y la variedad de información de Pistone y Sempi. En el tercer capítulo se presenta la q -deformación de la variedad estadística exponencial, con una sección adicional en la cual se caracteriza el funcional acumulante. El cuarto capítulo, esta dedicado a la construcción del haz tangente de la variedad y su caracterización. Además se muestra la relación entre los modelos paramétricos q -exponenciales y los vectores tangentes. De igual forma, se muestra la relación entre el concepto de entropía relativa de Tsallis y la variedad de información q -exponencial. Finalmente, se presentan las conclusiones y problemas abiertos.

Capítulo 1

Propuesta inicial

1.1. Objetivos

Objetivo general

A partir de modelos q -exponenciales, construir una variedad de Banach sobre las funciones de densidad de probabilidad positivas, que permita describir la entropía relativa según Tsallis de manera que cuando q tienda a uno, la variedad construida coincida con la variedad de información de Pistone y Sempi [21].

Objetivos específicos

1. Introducir el concepto de relación q -exponencial entre funciones de densidad de probabilidad positivas.
2. Construir una variedad de Banach sobre las funciones de densidad de probabilidad, basada en modelos q -exponenciales, la cual es una q -deformación de la variedad de la información de Pistone y Sempi.
3. Describir el espacio tangente asociado a dicha variedad.
4. Describir la entropía relativa, según Tsallis, a dos funciones de densidad de probabilidad, mediante la variedad de información construida.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Espacios de funciones de Orlicz

Para describir la variedad de información de Pistone y Sempì, es necesario conocer aspectos generales de la teoría de espacios de funciones de Orlicz, los cuales se presentan en esta sección.

Los espacios de sucesiones de Orlicz ℓ_Φ y de funciones de Orlicz $L_\Phi(\mu)$ (donde Φ es una función de Young) son la extensión natural de los espacios clásicos de sucesiones escalares ℓ_p y de funciones $L^p(\mu)$, respectivamente. Precisamente, en un intento natural por generalizar los espacios clásicos $L_p(\mu)$ y ℓ_p aparece en la literatura la teoría de espacios de Orlicz, de funciones medibles y de sucesiones. En estos espacios el papel de la función t^p es esencial y resulta natural tratar de reemplazarla por otro tipo de función convexa más general. En principio Young, en sus estudios sobre series de Fourier [32], ya había estudiado una clase de funciones convexas que hoy día se denominan *funciones de Young*, pero fueron Orlicz y sus estudiantes quienes plantearon el estudio de espacios de Orlicz, definidos a partir de funciones de Young.

Se presenta a continuación algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de espacios de funciones de Orlicz, que el lector puede encontrar en los libros de Rao y Ren [24], [23].

Una función de Young es una función convexa $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

$$\Phi(x) = \Phi(-x), \quad \Phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = \infty.$$

Como ejemplo considérese las siguientes funciones de Young, que son de interés para el presente trabajo:

▪

$$\phi_1(x) = \cosh(x) - 1$$

▪

$$\phi_2(x) = e^{|x|} - |x| - 1$$

■

$$\phi_3(x) = (1 + |x|) \ln(1 + |x|) - |x|$$

■

$$\phi^p(x) = |x|^p \quad \text{para } 1 \leq p < \infty. \quad (2.1)$$

Dada una función de Young Φ , existe una única función de Young Φ^* , llamada *función complementaria de Φ* , definida por

$$\Phi^*(y) = \sup\{xy - \Phi(x) : x \in \mathcal{R}\}.$$

Se verifica $\Phi^{**} = \Phi$ y también $xy \leq \Phi(x) + \Phi^*(y)$ que es una versión de la desigualdad de Young. A manera de ejemplo se observa que $\phi_2 = \phi_3^*$ y que $(\phi^p)^* = \phi^q$, donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Se dice que dos funciones de Orlicz Φ y Ψ son *equivalentes*, y se escribe $\Phi \equiv \Psi$, si existen $0 < c < C < \infty$ y $x_0 > 0$ tales que para cada $x > x_0$,

$$\Phi(cx) \leq \Psi(x) \leq \Phi(Cx).$$

En tal caso se verifica que $\Phi \equiv \Psi$ implica $\Phi^* \equiv \Psi^*$. Respecto a las funciones de Young propuestas como ejemplo, se cumple que $\phi_1 \equiv \phi_2$.

De otro lado, se dice que una función de Young Φ satisface la condición Δ_2 (y se escribe en este caso $\Phi \in \Delta_2$), si existen $c > 0$ y $x_0 > 0$ tales que para todo $x > x_0$ se cumple

$$\Phi(2x) \leq c \Phi(x).$$

Por ejemplo, ϕ^p y ϕ_3 satisfacen la condición Δ_2 , pero no ocurre así ni con ϕ_1 ni con ϕ_2 .

La *clase* de Orlicz asociada a un espacio de medida $(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$ y función de Young Φ , se define por

$$\mathcal{L}^\Phi(\mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_\Omega \Phi(f) d\mu < \infty\}.$$

El *espacio de funciones de Orlicz*, asociado a un espacio de medida $(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$ y a una función de Young Φ , se define como

$$L^\Phi(\mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_\Omega \Phi(\alpha f) d\mu < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0\},$$

identificando las funciones que difieren solamente en conjuntos de medida cero, respecto a la medida μ .

Ahora, $L^\Phi(\mu)$ es un espacio vectorial (de variables aleatorias cuando $\mu(\Omega) = 1$) que es la expansión lineal de $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ y que resulta ser un espacio de Banach con la norma de Orlicz que se define, mediante la función complementaria Φ^* , como:

$$M_\Phi(f) = \sup \left\{ \int_\Omega |fg| d\mu : g \in L^{\Phi^*}(\mu) \text{ y } \int_\Omega \Phi^*(g) d\mu \leq 1 \right\}.$$

También $L^\Phi(\mu)$ se puede dotar de la denominada *norma de Luxemburgo*, dada por:

$$N_\Phi(f) = \inf \left\{ k > 0 : \int_\Omega \Phi \left(\frac{f}{k} \right) d\mu \leq 1 \right\}.$$

Debido a que $M \leq N \leq 2M$, estas dos normas son equivalentes. Debe destacarse que funciones de Young equivalentes proveen normas equivalentes, y que si Φ y Φ^* son un par de funciones de Young complementarias, se satisface la siguiente versión de la desigualdad de Hölder:

$$\int |fg| d\mu \leq 2N_\Phi(f)M_{\Phi^*}(g).$$

De otro lado, si se supone que el espacio de medida $(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$ es tal que $\mu(\Omega) < \infty$, resulta claro que $L^\infty(\mu) \subset L^\Phi(\mu)$, el espacio de funciones esencialmente acotadas. Denotando por E^Φ a la clausura de $L^\infty(\mu)$ en L^Φ respecto a la norma N_Φ de , se define

$$M^\Phi = \left\{ f \in L^\Phi(\mu) : \int_\Omega \Phi(kf) d\mu < \infty, \forall k > 0 \right\}.$$

En general, $M^\Phi \subset E^\Phi$, y siempre que Φ sea continua con $\Phi(x) = 0$ sii $x = 0$, se tendrá:

1. $M^\Phi = E^\Phi$.
2. M^Φ es separable si y sólo si (Ω, Σ, μ) es separable. Si además Φ satisface la condición Δ_2 , entonces $M^\Phi = L^\Phi$.

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida y p es una función de densidad de probabilidad positiva, la medida con densidad p será denotada por $p \cdot \mu$, es decir, la medida definida para cada $A \in \Sigma$ como

$$(p \cdot \mu)(A) = \int_A p d\mu.$$

Ahora bien, en el espacio de funciones de Orlicz $L^\Phi(p \cdot \mu)$, la norma de Luxemburgo se denotará por

$$\|\cdot\|_{\Phi,p} = N_\Phi(\cdot).$$

2.2. Funciones q -deformadas

En contextos propios de formalismos matemáticos para termoestadística, se llama q -cálculo al cálculo con generalización de funciones básicas y operadores, mediante expresiones que dependen de un parámetro real $q \neq 1$, tal que cuando q tiende a uno se recupera lo generalizado; lo clásico. La expresión que depende de q es llamada q -deformación de la expresión que se generaliza. En este sentido, como veremos, se tienen por ejemplo, funciones exponenciales y logarítmicas q -deformadas, funciones trigonométricas (o hiperbólicas) q -deformadas, la q -transformada de Laplace, etc. En esta sección, se presentan

algunos aspectos del q -cálculo con conceptos y resultados necesarios para el planteamiento, desarrollo y contextualización del presente trabajo. Las demostraciones de los resultados expuestos en la presente sección, se pueden consultar en [4] y [5].

El estudio del q -cálculo inicia con trabajos de Euler y Gauss, y su construcción rigurosa fué realizada en la primera mitad del siglo XX . En este período, trabajos en series q -hipergeométricas, aplicaciones al análisis combinatorio y ecuaciones q -diferenciales, fueron realizados por Jackson, Carmichael, Ramanujan y Watson, entre otros. A Jackson se debe un gran número de escritos relacionados con q -diferenciación, q -trigonometría y teoría general del q -cálculo, como aparece bien reseñado en el libro *The History of q -Calculus and a New Method* [7].

En la última década del siglo XX , algunas de las ideas desarrolladas durante la primera mitad de dicho siglo tomaron gran fuerza en diferentes campos de la ciencia y la matemática; uno de los campos donde se ha aprovechado en gran medida el q -análisis, es el de la termoestadística no extensiva (no clásica). Esta sección está destinada básicamente a la descripción de dos importantes funciones q -deformadas, $\exp_q(x)$ y $\log_q(x)$.

2.2.1. Exponenciales y logaritmos deformados

Para mostrar la diferencia entre el trabajo presentado en esta memoria y el de Pistone publicado en 2009 [22], es pertinente mostrar las exponenciales q -deformadas y las exponenciales k -deformadas definidos por Kaniadakis, como casos particulares de la clase de funciones exponenciales κ -deformadas que considera Naudts en [18]. Por ello se partirá de la consideración de exponenciales κ -deformadas según Naudts para definir los otros dos tipos de deformaciones y notar que dan lugar a distintas deformaciones de modelos exponenciales.

Dado un real κ , una *función exponencial κ -deformada* según Naudts [18], denotada por $\exp_\kappa(x)$, es aquella que cumple las siguientes propiedades:

1. $\exp_\kappa(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se permite $\exp_\kappa(x) = \infty$.
2. $\exp_\kappa(x)$ es una función convexa y es estrictamente creciente en todos los puntos donde no se anula o no se hace infinita.
3. $\exp_\kappa(0) = 1$.
4. $\exp_\kappa(x)$ tiende rápidamente a cero cuando x tiende a $-\infty$, en otras palabras:

$$\int_0^\infty \exp_\kappa(-x) dx < \infty: \quad (2.2)$$

Similarmente, una *función logarítmica κ -deformada*, la cual se denota por $\ln_\kappa(x)$, es aquella función definida para todo número positivo x de manera que cumpla las siguientes propiedades:

1. $\ln_\kappa(x)$ es una función cóncava y es estrictamente creciente.

2. $\ln_\kappa(1) = 0$.
3. $\int_0^1 \ln_\kappa(x) dx < \infty$.

Ahora bien, la función inversa de una exponencial κ -deformada es una función logarítmica κ -deformada. Puesto que $\exp_\kappa(x)$ es estrictamente creciente, diverge cuando $x \rightarrow \infty$. Además, $\exp_\kappa(x)$ tiende rápidamente a cero cuando x tiende a $-\infty$; las dos situaciones anteriores indican que el rango de $\exp_\kappa(x)$ incluye al intervalo $(0, +\infty)$. Esto implica que la función inversa está definida para todo número positivo x . Recíprocamente, para una función logarítmica κ -deformada dada, la función exponencial κ -deformada correspondiente es:

$$\exp_\kappa(x) = \begin{cases} y, & \text{si existe } y > 0 \text{ para el cual } x = \ln_\kappa(y), \\ 0, & \text{si } x < \ln_\kappa(y) \text{ para todo } y > 0, \\ +\infty, & \text{si } x > \ln_\kappa(y) \text{ para todo } y > 0. \end{cases}$$

De otro lado, una propiedad de la función exponencial usual, que podría ser de interés que poseyera la función exponencial κ -deformada sería $\exp_\kappa(-x)\exp_\kappa(x) = 1$, siempre que $\exp_\kappa(-x)$ y $\exp_\kappa(x)$ no sean ni cero ni infinito. Para el caso de la función logarítmica, la propiedad correspondiente sería $\ln_\kappa(1/x) = \ln_\kappa(-x)$. Sin embargo, estas propiedades no siempre se cumplen para funciones κ -deformadas. Cuando esto sucede, es posible definir funciones deformadas duales. Para el caso de la función exponencial κ -deformada, la obtención de la función dual correspondiente es posible siempre que se satisfagan las siguientes condiciones:

1. $\int_0^\infty (\exp_\kappa(x))^{-1} dx < \infty$
2. $(\exp_\kappa(x))^{-1}$ es una función convexa de x .

En tal caso, la función dual de la exponencial κ -deformada estará dada por:

$$\exp_\kappa^*(x) = \frac{1}{\exp_\kappa(x)}. \quad (2.3)$$

Similarmente, la función dual de la función logarítmica κ -deformada se define por:

$$\ln_\kappa^*(x) = -\ln_\kappa(1/x). \quad (2.4)$$

Para la función logarítmica κ -deformada, considerese la siguiente integral:

$$F_\kappa(x) = \int_1^x \ln_\kappa(y) dy, \quad x > 0. \quad (2.5)$$

La expresión anterior se utiliza para definir una nueva función logarítmica κ -deformada, denotada por $\omega_\kappa(x)$, la cual se define como:

$$\omega_\kappa(x) = (x-1)F_\kappa(0) - xF_\kappa(1/x) \quad (2.6)$$

siempre que se cumpla la condición para la existencia de la función dual $ln_{\kappa}^*(x)$ dada por:

$$\int_0^1 ln_{\kappa}(1/x)dx < \infty. \quad (2.7)$$

Ahora, dados dos parámetros $\lambda > 0$ y $\mu > 0$ y una función logarítmica κ -deformada, se puede definir una nueva función logarítmica κ -deformada, denotada por $ln_{\kappa}^{esc}(x)$ como:

$$ln_{\kappa}^{esc}(x) = \lambda(ln_{\kappa}(\mu x) - ln_{\kappa}(\mu)) \quad (2.8)$$

Para el caso de exponenciales κ -deformadas se tiene la relación:

$$exp_{\kappa}^{esc}(x) = \mu^{-1}exp_{\kappa}(\lambda^{-1}x + ln_{\kappa}(\mu)) \quad (2.9)$$

En tanto que si existe la logarítmica deducida, la relación estará dada por:

$$\omega_{\kappa}^{esc}(x) = \lambda(\omega_{\kappa}(\mu^{-1}x) - \omega_{\kappa}(\mu^{-1})) \quad (2.10)$$

A continuación se presentan dos ejemplos de κ -deformaciones según Naudts, que corresponden precisamente a las deformaciones definidas por Kaniadakis y Tsallis, respectivamente.

Ejemplo 2.2.1. Logarítmica deformada de Tsallis. *Considérense las siguientes funciones κ -deformadas, donde $-1 < \kappa < 1$:*

$$ln_{\kappa}(x) = \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)(x^{\kappa} - 1), \quad (2.11)$$

$$exp_{\kappa}(x) = \left[1 + \frac{\kappa}{1 + \kappa}x\right]_+^{1/\kappa}, \quad (2.12)$$

donde $[u]_+ = \max(0, u)$. En este caso se tendrá:

$$ln_{\kappa}^*(x) = -ln_{\kappa}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa}ln_{-\kappa}(x). \quad (2.13)$$

Por otro lado,

$$F_q(x) = \frac{1}{\kappa}(x^{1+q} - 1) - \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)(x - 1) \quad (2.14)$$

En particular, $F_{\kappa}(0) = 1$. Así, se obtiene:

$$\omega_{\kappa}(x) = \frac{1}{1 - \kappa}ln_{-\kappa}(x) = \frac{1}{1 + \kappa}ln_{\kappa}^*(x) \quad (2.15)$$

De donde se concluye que $\omega_{\kappa}(x) = ln_{-\kappa}^{esc}(x)$ con los parámetros de escalonamiento λ y μ siendo cualquier par de positivos que cumplan la relación

$$(1 - \kappa)\lambda = \mu^{\kappa}$$

Observación 1. En el contexto de Tsallis se utiliza la función logarítmica κ -deformada definida por

$$\omega_\kappa(x) = \frac{1}{\kappa}(1 - x^{-\kappa}), \quad (2.16)$$

la cual se puede obtener fácilmente de 2.6 y 2.14. Por otro lado, la notación en tal formalismo es $\exp_q(x)$ y $\ln_q(x)$ con $q = 1 + \kappa$. Cuando se haga explícito que se está trabajando en el contexto de Tsallis, se escribirá e_q^x y $\ln_q(x)$, y por tanto:

$$\ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (2.17)$$

y

$$e_q^x = (1 + (1 - q)x)^{1/(1-q)}. \quad (2.18)$$

Aunque en esta sección se usa la notación $\exp_q(x)$, en su lugar se escribe e_q^x para abreviar la notación en el resto de esta memoria de tesis.

Ejemplo 2.2.2. Funciones deformadas de Kaniadakis. Para $-1 < k < 1$, $\kappa \neq 0$ Kaniadakis define

$$\exp_k(x) = (kx + \sqrt{1 + k^2 x^2})^{1/k}, \quad (2.19)$$

la cual es una función positiva y finita para todo número real x . Su función inversa es

$$\ln_k(x) = \frac{1}{2k}(x^k - x^{-k}). \quad (2.20)$$

En el caso límite $k = 0$ estas funciones coinciden con las definiciones usuales de funciones exponencial y logarítmica, respectivamente.

2.2.2. Propiedades y álgebra de q -deformadas

Es de interés resaltar las propiedades básicas de las funciones q -deformadas $\exp_q(x)$ y $\ln_q(x)$ así como otras posibilidades de generalizaciones que pueden obtenerse a partir de ellas. Considérense las funciones q -deformadas definidas por 2.17 y 2.18. En tal caso se tiene las siguientes propiedades.

Proposición 2.2.1. La función $\exp_q(x)$ tiene las siguientes propiedades geométricas:

1. Para $q < 0$, $x \in [0, \infty)$, $\exp_q(x)$ es una función positiva, continua, creciente, cóncava, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_q(x) = \infty$$

2. Para $0 < q < 1$, $x \in [0, \infty)$, $\exp_q(x)$ es una función positiva, continua, creciente, convexa, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_q(x) = \infty$$

3. Para $1 < q < \frac{1}{q-1}$, $x \in [0, \frac{1}{q-1})$, $\exp_q(x)$ es una función positiva, continua, creciente, convexa, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{q-1})^-} \exp_q(x) = \infty$$

A continuación se muestran algunas gráficas que ilustran el comportamiento de $\exp_q(x)$ para diferentes valores de q .

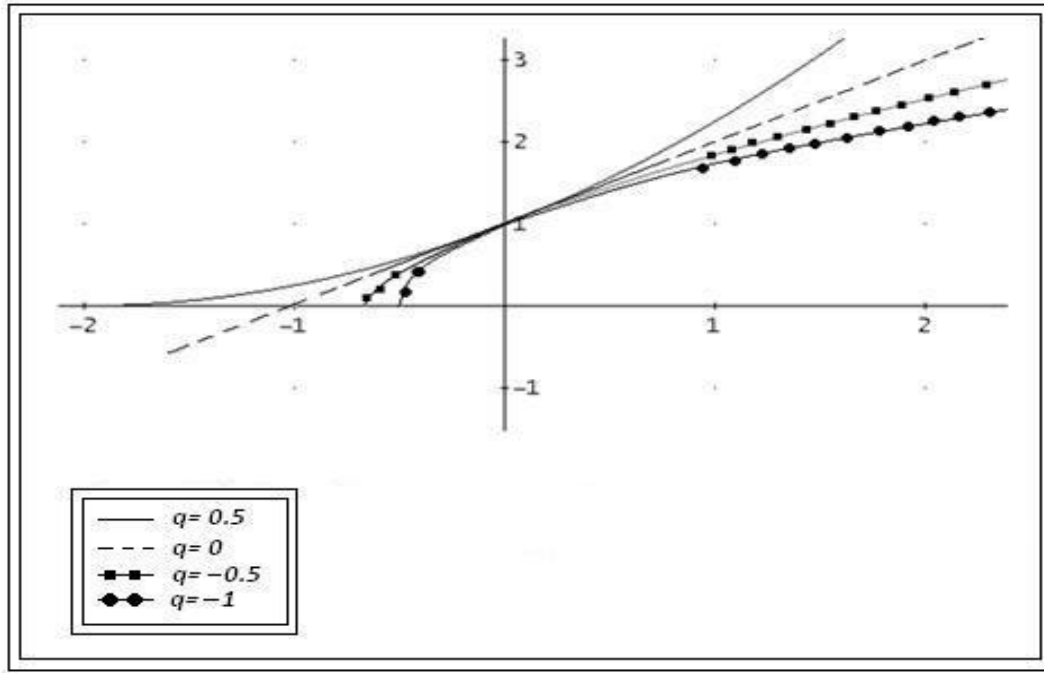
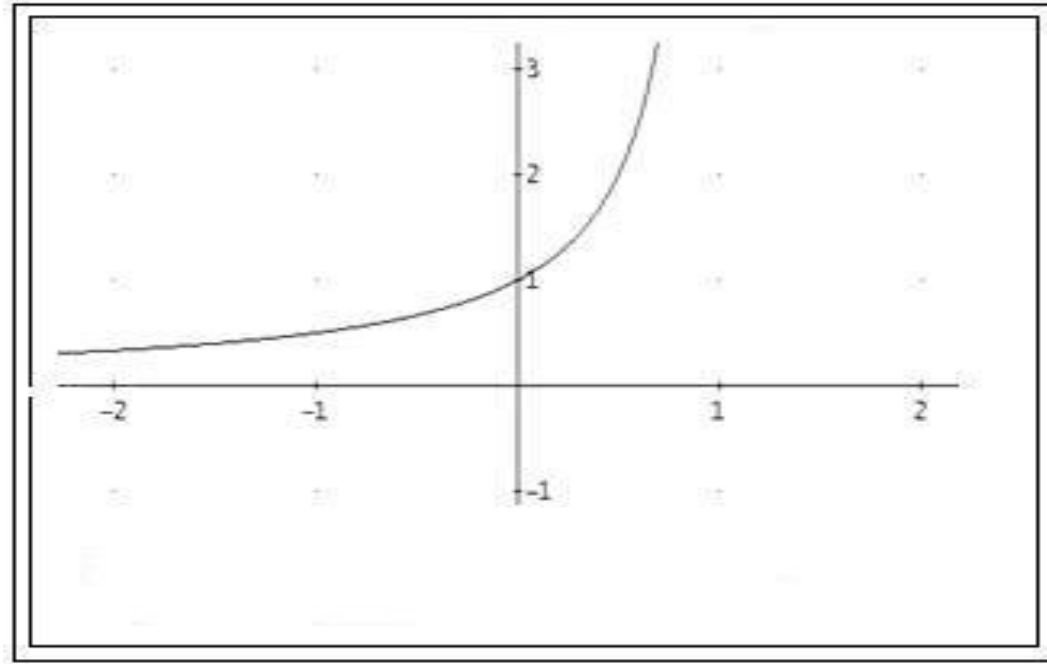


Figura 2.1: Gráficas $\exp_q(x)$ para $q < 1$

Figura 2.2: Gráfica de $\exp_2(x)$

En este trabajo se emplean las funciones \exp_q para construir funciones de Young y por la forma de construcción será necesario que las \exp_q empleadas sean convexas y definidas en $[0, \infty)$. Los q admisibles para el requerimiento anterior corresponden a $0 < q < 1$. Se descartan los valores negativos de q porque, como lo muestra la gráfica 2.2.2, la función \exp_q no es convexa para valores negativos de q . También se descartan los valores de q mayores que uno porque, como lo muestra la gráfica 2.2.2 y como lo expresan las propiedades expuestas, cuando $q > 1$ la gráfica de \exp_q tiene asintota vertical en $\frac{1}{q-1}$.

Proposición 2.2.2. *La función $\ln_q(x)$ tiene las siguientes propiedades geométricas:*

1. Para $q < 0$, $x \in [0, \infty)$, $\ln_q(x)$ es una función continua, creciente, convexa, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln_q(x) = \infty$$

2. Para $0 < q < 1$, $x \in [0, \infty)$, $\ln_q(x)$ es una función continua, creciente, cóncava, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln_q(x) = \infty$$

3. Para $1 < q < \frac{1}{q-1}$, $x \in [0, \infty)$, $\ln_q(x)$ es una función creciente para $x \in [0, \frac{1}{q-1})$, continua, cóncava, y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln_q(x) = \frac{1}{q-1}$$

Algunas gráficas de $\ln_q(x)$ se muestran a continuación.

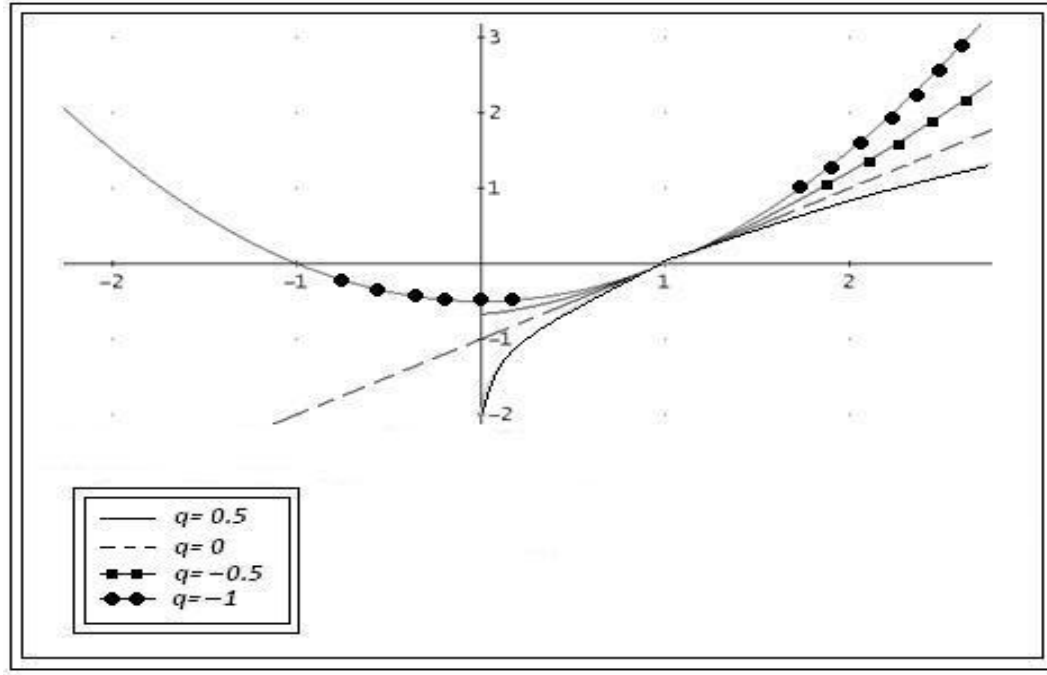


Figura 2.3: Gráficas $\ln_q(x)$ para $q < 1$

La siguiente proposición da cuenta de propiedades similares a las de las funciones exponencial y logarítmica usuales.

Proposición 2.2.3. *Las funciones $\exp_q(x)$ y $\ln_q(x)$ tienen las siguientes propiedades:*

1. **Producto**

$$\exp_q(x)\exp_q(y) = \exp_q(x + y + (1 - q)xy) \quad (2.21)$$

2. **Cociente**

$$\frac{\exp_q(x)}{\exp_q(y)} = \exp_q\left(\frac{(x - y)}{1 + (1 - q)(y)}\right) \quad (2.22)$$

3. **Potencia**

$$(\exp_q x)^n = \exp_{1-(1-q)/n}(nx) \quad (2.23)$$

4. **Inverso**

$$(\exp_q(x))^{-1} = \exp_q\left(\frac{-x}{1 + (1 - q)(x)}\right) = \exp_{2-q}(-x) \quad (2.24)$$

5. **Derivada**

$$\frac{d}{dx}[\exp_q(x)] = (\exp_q(x))^q = \exp_{2-1/q}(qx) \quad (2.25)$$

6. **Integral**

$$\int \exp_q(nx)dx = \frac{1}{(2 - q)n}(\exp_q(nx))^{2-q} \quad (2.26)$$

7. *Producto*

$$\ln_q(xy) = \ln_q(x) + \ln_q(y) - (1 - q)\ln_q(x)\ln_q(y) \quad (2.27)$$

8. *Cociente*

$$\ln_q(x/y) = \frac{\ln_q(x) - \ln_q(y)}{1 + (1 - q)\ln_q(y)} \quad (2.28)$$

9. *Potencia*

$$\ln_q(x^n) = \frac{n}{1 - q}\ln_{1-q}(x^{1-q}) \quad (2.29)$$

10. *Inverso*

$$\ln_q(x^{-1}) = \frac{\ln_q(x)}{1 + (1 - q)\ln_q(x)} = \frac{-1}{x^{1-q}}\ln_q(x) \quad (2.30)$$

11. *Derivada*

$$\frac{d}{dx}[\ln_q(x)] = \frac{1}{x^q} \quad (2.31)$$

12. *Integral*

$$\int \ln_q(x)dx = \frac{x(\ln_q(x) - 1)}{2 - q} \quad (2.32)$$

 q -Álgebra

Se pueden considerar q -deformaciones de las operaciones suma y producto como sigue.

1. La q -suma \oplus_q , de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, está dada por:

$$x \oplus_q y = x + y + (1 - q)xy \quad (2.33)$$

2. El q -producto \otimes_q , de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, está dado por

$$x \otimes_q y = [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}}, (x > 0, y > 0) \quad (2.34)$$

Proposición 2.2.4. Las operaciones \oplus_q y \otimes_q cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y modulativa, siendo 0 el módulo para \oplus_q y 1 el módulo para \otimes_q .

Dado que \otimes_q está bien definida para $x, y > 0$ números reales, las propiedades asociativa y conmutativa tienen sentido siempre que $0 < x \otimes_q y < \infty$ y $0 < y \otimes_q z < \infty$.

Proposición 2.2.5. Para cada real $x \neq \frac{1}{q-1}$ existe un real b que es inverso único de x bajo \oplus_q . Dicho inverso se denota por $b = \ominus_q x$

Así

$$x \oplus_q (\ominus_q x) = 0$$

Con la definición de inverso de x para \oplus_q es posible definir la q -diferencia para dos elementos x, y , de la siguiente manera:

$$x \ominus_q y = x \oplus_q (\ominus_q y) = x - \frac{y}{1 + (1 - q)y} - \frac{(1 - q)xy}{1 + (1 - q)y} = \frac{x - y}{1 + (1 - q)y} \quad (2.35)$$

Las siguientes propiedades se cumplen para \oplus_q y \ominus_q :

$$x \ominus_q y = \ominus_q y \oplus_q x \quad (2.36)$$

$$x \ominus_q (y \ominus_q z) = (x \ominus_q y) \oplus_q z. \quad (2.37)$$

Proposición 2.2.6. *Para $x > 0$ existe un inverso único bajo \otimes_q .*

Dado $x > 0$, su inverso bajo \otimes_q se le representa por $\oslash_q x$ y permite definir la q -razón, la cual está dada para dos reales x, y , ambos mayores que cero, y tales que $x^{1-q} \leq y^{1-q} + 1$, por:

$$x \oslash_q y = x \otimes_q (\oslash_q y) = (x^{1-q} + (2 - y^{1-q})_+ - 1)^{\frac{1}{1-q}} = (x^{1-q} - y^{1-q} + 1)_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.38)$$

Para $0 < x \leq 2$ se cumple $1 \oslash_q (1 \oslash_q x) = x$. Así mismo, si $q < 1$, la expresión bastante singular $1 \oslash_q 0$ no diverge.

A continuación se presentan propiedades, similares a las del producto y cociente usuales:

$$x \oslash_q y = 1 \oslash_q (y \oslash_q x) \quad \text{si} \quad x^{1-q} \leq y^{1-q} + 1 \quad (2.39)$$

$$x \oslash_q (y \oslash_q z) = (x \oslash_q y) \otimes_q z = (x \otimes_q z) \oslash_q y \quad \text{si} \quad z^{1-q} - 1 \leq y^{1-q} \leq x^{1-q} + 1 \quad (2.40)$$

Las definiciones de \oplus_q y \otimes_q dadas por 2.33 y 2.34 así como las propiedades para las funciones exponencial y logarítmica q -deformadas que se demostraron en las proposiciones 2.2.3, permiten establecer el siguiente resultado.

Proposición 2.2.7. *La relación entre las operaciones \oplus_q , \otimes_q , \ominus_q , y \oslash_q para las funciones $\exp_q(x)$ y $\ln_q(x)$, están dadas por las siguientes propiedades:*

■ **Propiedades algebraicas para $\exp_q(x)$**

$$\exp_q(x)\exp_q(y) = \exp_q(x \oplus_q y) \quad (2.41)$$

$$\exp_q(x)/\exp_q(y) = \exp_q(x \ominus_q y) \quad (2.42)$$

$$\exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) = \exp_q(x + y) \quad (2.43)$$

$$\exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) = \exp_q(x - y) \quad (2.44)$$

■ **Propiedades algebraicas para $\ln_q(x)$**

$$\ln_q(xy) = \ln_q(x) \oplus_q \ln_q(y) \quad (2.45)$$

$$\ln_q(x/y) = \ln_q(x) \ominus_q \ln_q(y) \quad (2.46)$$

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q(x) + \ln_q(y) \quad (2.47)$$

$$\ln_q(x \oslash_q y) = \ln_q(x) - \ln_q(y) \quad (2.48)$$

2.2.3. Otras q -deformaciones

Muchas expresiones matemáticas pueden ser escritas en términos de la función exponencial, por lo que parece claro que una q -deformación de dichas expresiones puede darse de forma natural, haciendo uso de la función $\exp_q(x)$. Es este el caso de las funciones trigonométricas, hiperbólicas, la transformada de Laplace, o las distribuciones gaussianas. Acorde con los trabajos de tesis citados [16], [4] y [5], a continuación se presenta de forma sucinta algunas de estas posibles q -deformaciones.

q -trigonométricas

Sea $q \in \mathbb{R}$, y considérese

$$Q_n(q) = q(2q-1)(3q-2) \cdots (nq-(n-1)) = \prod_{i=1}^n (iq - (i-1)) \quad (2.49)$$

y $Q_0(q) = 1$.

Proposición 2.2.8. *Sea $\exp_q(x)$ definida como antes, entonces*

$$\frac{d^n}{dx^n} [\exp_q(x)] = Q_{n-1}(q) [\exp_q(x)]^{(nq-(n-1))} \quad (2.50)$$

Si se considera la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para $f(x) = \exp_q(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots &= \exp_q(0) + \left. \frac{d}{dx} [\exp_q(x)] \right|_{x=0} x + \left. \frac{d^2}{dx^2} [\exp_q(x)] \right|_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \cdots \\ &= 1 + x + q \frac{x^2}{2!} + q(2q-1) \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n-1}(q) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Esta serie converge para toda $x \in \mathbb{R}$. Así pues, la expresión en serie de Taylor para $\exp_q(x)$ viene dada por:

$$\exp_q(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n-1}(q) \frac{x^n}{n!} \quad (2.51)$$

Teniendo en cuenta las series de Taylor para e^x , $\sen(x)$ y $\cos(x)$,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \sen(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

entonces, la expresión 2.51 sugiere una generalización natural para las funciones trigonométricas en términos del parámetro q . De acuerdo con 2.51, las q -trigonómicas $sen_q(x)$ y $cos_q(x)$ están dadas por

$$sen(x)_q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.52)$$

$$cos(x)_q = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (2.53)$$

las cuales convergen para $x < |1 - q|^{-1}$. Nótese que con las definiciones anteriores se cumple la conocida identidad de Euler:

$$exp_q(ix) = cos_q(x) + i sen_q(x) \quad (2.54)$$

Ahora puede probarse la siguiente caracterización de las funciones q -trigonómicas en términos de las funciones trigonométricas usuales.

Proposición 2.2.9. *Las funciones $sen_q(x)$ y $cos_q(x)$ se pueden escribir, respectivamente, en términos de las funciones $sen(x)$ y $cos(x)$ como:*

$$sen_q(x) = \rho_q(x) sen(\theta_q(x)) \quad (2.55)$$

$$cos_q(x) = \rho_q(x) cos(\theta_q(x)) \quad (2.56)$$

donde

$$\rho_q(x) = \sqrt{(1 + (1 - q)^2 x^2)^{1/(1-q)}} = [exp_q((1 - q)x^2)]^{1/2} \quad (2.57)$$

$$\theta_q(x) = \frac{\arctan((1 - q)x)}{1 - q} \quad (2.58)$$

Las funciones q -trigonómicas restantes se definen en la forma usual. Por ejemplo, para el caso de $tan_q(x)$ se tiene:

$$tan_q(x) = \frac{sen_q(x)}{cos_q(x)} = tan(\theta_q(x))$$

Por otro lado, es posible mostrar que las propiedades más relevantes de las funciones circulares usuales tienen propiedades correspondientes para las q generalizadas, las cuales recuperan a las primeras cuando $q \rightarrow 1$. Entre ellas tenemos:

1. Teorema de Pitágoras:

$$sen_q(x) + cos_q(x) = \rho_q^2(x)$$

2. $x \sim sen_q(x)$ para $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{sen_q(x)}{x} = 1$$

3. Derivada de $sen_q(x)$:

$$\frac{d}{dx} sen_q(x) = cos_{2-1/q}(qx)$$

4. Derivada $\cos_q(x)$:

$$\frac{d}{dx}\cos_q(x) = -\operatorname{sen}_{2-1/q}(qx)$$

5. Fórmula de De Moivre:

$$(\cos_q \pm i\operatorname{sen}_q)^n = \cos_{1-(1-q)/n}(nx) \pm \operatorname{sen}_{1-(1-q)/n}(nx)$$

6. Definición de las trigonométricas en términos de exponencial (forma alterna de la identidad de Euler):

$$\begin{aligned}\cos_q(x) &= \frac{\exp_q(ix) + \exp_q(-ix)}{2} \\ \operatorname{sen}_q(x) &= \frac{\exp_q(ix) - \exp_q(-ix)}{2}\end{aligned}$$

q -hiperbólicas

Los resultados obtenidos en las generalizaciones anteriores para el caso de las funciones q -exponencial, q -logarítmica y q -trigonométricas permiten realizar de forma natural la extensión a las funciones hiperbólicas mediante las expresiones

$$\operatorname{senh}_q(x) = \frac{\exp_q(x) - \exp_q(-x)}{2} \quad (2.59)$$

$$\operatorname{cosh}_q(x) = \frac{\exp_q(x) + \exp_q(-x)}{2} \quad (2.60)$$

A partir de las definiciones dadas por 2.59 y 2.60 se tiene la expresión para $\tanh_q(x)$ dada por

$$\tanh_q(x) = \frac{\operatorname{senh}_q(x)}{\operatorname{cosh}_q(x)} \quad (2.61)$$

Por otro lado, es fácil probar que las siguientes propiedades se cumplen:

1. Teorema de Pitágoras para hiperbólicas:

$$\operatorname{cosh}_q^2(x) + \operatorname{senh}_q^2(x) = \exp_q(x)\exp_q(-x)$$

2. Fórmula de De Moivre:

$$(\operatorname{cosh}_q(x) + \operatorname{senh}_q(x))^n = \operatorname{cosh}_{1-(1-q)/n}(nx) + \operatorname{senh}_{1-(1-q)/n}(nx)$$

3. Derivada de $\operatorname{senh}_q(x)$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}_q(x)] = \operatorname{cosh}_{2-(1/q)}(x)$$

4. Derivada de $\operatorname{cosh}_q(x)$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosh}_q(x)] = \operatorname{senh}_{2-(1/q)}(x)$$

q -Transformada de Laplace

La transformada de Laplace para una variable de valor real no negativo $f(t)$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\exp_1(-st)dt$$

Hay tres maneras de generalizar la transformada de Laplace utilizando q -exponenciales, dependiendo de las posibles interpretaciones que se toman del término $\exp_1(-st)$; estas son: $\exp_q(-st)$, $(\exp_q t)^s$ y $(\exp_q(t))^{-s}$. Todas las posibilidades anteriores recuperan la transformada usual cuando $q \rightarrow 1$. Siguiendo la propuesta de [?], que corresponde a la segunda opción para la generalización buscada, la q -transformada de Laplace para una función $f(t)$, con $t \geq 0$, está dada por la función

$$F_q(s) = \mathcal{L}_q\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)[\exp_q(-t)]^s dt \quad (2.62)$$

donde $s = \alpha + \beta i$ es un número complejo.

Para proceder con la generalización dada por 2.62 son necesarias las dos definiciones siguientes.

Definición 2.2.1. Sea $f(t)$ una función definida en el intervalo $[a, \infty)$. Se dice que $f(t)$ es de orden q -exponencial α_0 , con $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, si existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $|[\exp_q(-t)]^{\alpha_0} f(t)| \leq M$, para todo $t \geq a$

Definición 2.2.2. Se dice que una función $f(t)$ definida para todo $t \in [a, \infty)$ es continua por trozos en $[a, \infty)$ si para todo intervalo finito $[a, b]$ se cumple que:

1. $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$.
2. En cada punto t_0 donde $f(t)$ presenta discontinuidad, existen

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \quad y \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t).$$

Con lo anterior se puede probar lo siguiente.

Proposición 2.2.10. Sea $f(t)$ continua a trozos y de orden q -exponencial α_0 para $0 \leq t < \infty$. Entonces, $F_q(s) = \mathcal{L}_q\{f(t)\}$ ($s = \alpha + \beta i$) existe para $\alpha > \alpha_0 + (q - 1)$.

Al igual que en los casos anteriores, la generalización propuesta para la transformada de Laplace a partir de la función $\exp_q(x)$ permite definir propiedades para $F_q(s)$ que se reducen a las propiedades usuales de $F(s)$ cuando $q \rightarrow 1$. Algunas de estas propiedades se presentan a continuación. Los detalles de la prueba de cada propiedad pueden consultarse en [4].

Propiedades de la q -transformada

1. La inversa de $F_q(S)$ está dada por la función:

$$\mathcal{L}_q^{-1}\{F_q(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_q(s) [\exp_q(-t)]^{-s-(1-q)} ds$$

donde c es una constante real que supera a la parte real de todas las singularidades de $F_q(s)$. De la definición de $\mathcal{L}_q^{-1}F_q(s)$ se derivan las siguientes igualdades

$$\mathcal{L}_q^{-1}\{\mathcal{L}_q\{f(t)\}\} = f(t) \quad y \quad \mathcal{L}_q\{\mathcal{L}_q^{-1}\{F_q(s)\}\} = F_q(s)$$

2. Valores límite:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}_q\{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad y \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}_q\{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - (1-q)t]f(t)$$

3. Linealidad:

$$\mathcal{L}_q\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}_q\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}_q\{f_2(t)\}$$

4. Cambio de escala:

$$\mathcal{L}_q\{f(at)\} = \frac{1}{a} F_{q'}\left\{\frac{s}{a}\right\}, \quad \text{con} \quad q' = 1 - \frac{1-q}{a}$$

5. Primera propiedad de traslación:

$$\mathcal{L}_q\{[\exp_q(-t)]^{-s_0} f(t)\} = F_q(s - s_0)$$

6. Segunda propiedad de traslación:

$$\mathcal{L}_q\left\{f\left(\frac{t-t_0}{1-(1-q)t_0}\right) u\left(\frac{t-t_0}{1-(1-q)t_0}\right)\right\} = [\exp_q(-t_0)]^{s-(1-q)} F_q(s)$$

donde $u(x)$ es la función escalón unitario de Heavyside.

7. q -transformada de derivadas (orden 1 y 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q\{f'(t)\} &= s \mathcal{L}_q\left\{\frac{f(t)}{1-(1-q)t}\right\} - f(0) \\ \mathcal{L}_q\{f''(t)\} &= s(s-(1-q)) \mathcal{L}_q\left\{\frac{f(t)}{[1-(1-q)t]^2}\right\} - f'(0) - s f(0) \end{aligned}$$

8. Derivada de q -transformada:

$$\begin{aligned} F'_q(s) &= \mathcal{L}_q\{[\ln(\exp_q(-t))]f(t)\} \\ F_q^{(n)}(s) &= \mathcal{L}_q\{[\ln^n(\exp_q(-t))]f(t)\} \end{aligned}$$

9. q -transformada de la integral:

$$\mathcal{L}_q\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{s-(q-1)} \mathcal{L}_q\{(1-(1-q)t)f(t)\}$$

10. Integral de la q -transformada

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F_q(u) du &= \mathcal{L}_q\left\{\frac{-f(t)}{\ln[\exp_q(-t)]}\right\} \\ \int_s^\infty \cdots \int_s^\infty F_q(u) du^n &= \mathcal{L}_q\left\{\frac{(-1)^n f(t)}{\ln^n[\exp_q(-t)]}\right\} \end{aligned}$$

2.3. Geometría diferencial

2.3.1. Diferenciabilidad de una función entre espacios de Banach

Se iniciará recordando el concepto de diferenciabilidad de una función entre espacios de Banach de acuerdo a [25] y [15].

Para una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la interpretación usual de la derivada en un punto $u_0 \in U$ es la pendiente de la línea tangente al grafo de f en u_0 . La generalización de lo anterior, se basa en la interpretación de $Df(u_0) = f'(u_0)$ como una función lineal actuando sobre el vector $u - u_0$; se puede decir que $Df(u_0)$ es la única función lineal de \mathbb{R} en \mathbb{R} tal que la función

$$g : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad u \mapsto g(u) = f(u_0) + Df(u_0)(u - u_0)$$

es tangente a f en u_0 .

Esta versión puede ser extendida a funciones definidas entre espacios de Banach como sigue.

Definición 2.3.1. Sean E y F espacios vectoriales normados, y $f, g : U \subset E \longrightarrow F$ funciones, donde U es un conjunto abierto en E . Se dice que f y g son **funciones tangentes** en el punto $u_0 \in U$ si se cumple

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\|f(u) - g(u)\|_F}{\|u - u_0\|_E} = 0.$$

Para $f : U \subset E \longrightarrow F$ y $u_0 \in U$ supongamos que existe por lo menos una aplicación lineal $L : E \longrightarrow F$, tal que la función $g_L : U \subset E \longrightarrow F$ dada por $g_L(u) = f(u_0) + L(u - u_0)$ es tangente a f en u_0 .

Siempre que L existe se puede probar que es única, y se dirá que f es **diferenciable** en u_0 . Se define la derivada de f en u_0 por $Df(u_0) = L$.

La evaluación de $Df(u_0)$ sobre $v \in E$ será denotada por $Df(u_0) \cdot v$. Si f es diferenciable en cada $u_0 \in U$, la función

$$Df : U \longrightarrow L(E, F); \quad u \mapsto Df(u)$$

es llamada la **derivada** de f , donde $L(E, F)$ es el espacio de aplicaciones lineales de E en F . Además, si Df es una función continua (considerando en $L(E, F)$ la topología de la norma uniforme) se dirá que f es de **clase C^1** (o que es **continuamente diferenciable**).

Procediendo inductivamente se considera la función

$$D^p f := D(D^{p-1} f) : U \subset E \longrightarrow L^p(E, F),$$

identificando $L(E, L^{p-1}(E, F))$ con $L^p(E, F)$. Si $D^k f$ para $1 \leq k \leq p$ existe, y es continua en norma, decimos que f es de **clase C^p** (o es **p -veces continuamente diferenciable**).

Proposición 2.3.1. *Sea U un abierto en un espacio de Banach E , y sea $f : U \rightarrow F$ una función de clase C^p . Entonces $D^p f$ (visto como un elemento de $L^p(E, F)$) es simétrico.*

Las siguientes proposiciones corresponden a mapeos continuos lineales y multilineales.

Proposición 2.3.2. *Sean E, F y G espacios de Banach, y U abierto en E . Sea $f : E \rightarrow F$ de clase C^p y $g : F \rightarrow G$ continuo y lineal. Entonces $g \circ f$ es de clase C^p y*

$$D^p(g \circ f) = g \circ (D^p f)$$

Proposición 2.3.3. *Si E_1, \dots, E_r y F son espacios de Banach y*

$$f : E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow F$$

es un mapeo continuo multilineal, entonces f es de clase C^∞ , y su primera $(r+1)$ derivada es 0.

Proposición 2.3.4. *Sean E y F espacios de Banach isomórfos. Si $u : E \rightarrow F$ es un isomorfismo lineal topológico, denotamos su inversa por u^{-1} . Entonces el mapeo*

$$u \rightarrow u^{-1}$$

es un isomorfismo de clase C^∞ . Su derivada en un punto u_0 es el mapeo lineal de $L(E, F)$ en $L(F, E)$ dado por:

$$v \rightarrow u_0^{-1} v u_0^{-1}.$$

Dos conceptos importantes respecto a la diferenciabilidad de funciones entre espacios de Banach son la diferenciabilidad de Gâteaux y de Fréchet, los cuales son de gran utilidad en aplicaciones de los espacios de Orlicz.

Definición 2.3.2. *Sean X un espacio de Banach y $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unidad. Entonces la norma $\|\cdot\|$ es:*

1. *Gâteaux diferenciable si*

$$G(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (2.63)$$

existe, y es uniformemente Gâteaux diferenciable si el límite es uniforme en $x \in S(X)$ para cada $y \in S(X)$ fijo.

2. *Fréchet diferenciable si el límite en 2.63 existe uniformemente en $y \in S(X)$ para cada $x \in S(X)$ fijo, y es uniformemente Fréchet diferenciable si el límite en 2.63 existe uniformemente para el par $(x, y) \in S(X) \times S(X)$.*

2.3.2. Variedades de Banach

Para precisar el concepto de variedad de Banach de clase C^p , considérese, X , un espacio topológico. Una **carta** sobre X consiste en un par (U, ϕ) , donde U es un conjunto abierto en X y ϕ es una biyección de U a algún abierto A en un espacio de Banach \mathfrak{E} . Dado un conjunto de índices I , una colección de cartas sobre X

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$$

donde

$$\phi_i : U_i \rightarrow A_i \subset \mathfrak{E}_i,$$

se denomina un C^p -**atlas** con $p \geq 0$, cuando se verifican las siguientes condiciones:

1. la familia $\mathcal{F} = \{U_i : i \in I\}$ es un cubrimiento de X .
2. Para cada i, j se tiene $\phi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto en \mathfrak{E}_i .
3. si para todo $i, j \in I$, con $U_i \cap U_j \neq \Phi$, el mapeo (llamado **función de transición**)

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) , \quad (2.64)$$

es un isomorfismo de clase C^p .

$$\begin{array}{ccc} & U_i \cap U_j & \\ \phi_i \uparrow & & \uparrow \phi_j \\ \phi_i(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\phi_j \circ \phi_i^{-1}} & \phi_j(U_i \cap U_j) \end{array}$$

Diagrama 1.

En general X no tiene que ser un espacio de Hausdorff. Si se requiere esto, se debe especificar una condición de separación en el cubrimiento de X . Si X es un espacio de Hausdorff entonces cualquier construcción que se realice (productos, haces tangentes, etc), conducirá a espacios de Hausdorff.

Se denomina **variedad de Banach de clase C^p** al par (X, \mathcal{A}) , formado por el espacio X y un C^p -atlas \mathcal{A} . Supongamos que (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) son dos cartas tales que $U_i \cap U_j \neq \Phi$ y sea $p \geq 1$. Entonces $D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})$ es un isomorfismo topológico y lineal entre los espacios \mathfrak{E}_i y \mathfrak{E}_j .

Si $\forall i, j$ la función definida en (2.64) es un isomorfismo topológico (es decir, isomorfismo lineal y homeomorfismo), entonces todos los espacios \mathfrak{E}_i son isomorfos a un espacio \mathfrak{E} , mediante isomorfismos topológicos lineales. En este caso se dice que \mathcal{A} es un atlas **modelado sobre \mathfrak{E}** .

Sea X una \mathbb{C}^p variedad de Banach, $x \in X$ y considérese

$$E(x) = \{(U, \phi, v) : (U, \phi) \text{ es una carta con } x \in U, v \in \mathfrak{E}\}$$

Ahora, en $E(x)$ se forma una relación de equivalencia R como sigue: dos ternas (U, ϕ, v) , (V, ψ, w) se consideran R -equivalentes si

$$D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \cdot v = w \quad ,$$

La derivada del mapeo $\psi \circ \phi^{-1}$ en $\phi(x)$ evaluada en v es un elemento de $\psi(V)$.

El espacio

$$T_x(X) = E(x)/R = \{[(U, \phi, v)] : x \in U\} \quad ,$$

se denomina **espacio tangente de X** en el punto x y la clase de equivalencia de dichas ternas se denomina vector tangente de X en el punto x . El espacio $T_x(X)$ es la mejor aproximación lineal local en x . Dicho espacio hereda una estructura de espacio vectorial topológico de la siguiente manera.

Cada carta (U, ϕ) determina una biyección de $T_x(X)$ en un espacio de Banach, es decir, en la clase de equivalencia (U, ϕ, v) correspondiente al vector v . En términos de dicha biyección es posible **transportar** a $T_x(X)$ la estructura de espacio vectorial topológico dado por la carta, y es claro que dicha estructura es independiente de la carta seleccionada.

La familia $\{X, T_x(X)\}$ se denomina el haz tangente y se denota por $T(X)$. En esta familia se puede definir una estructura de C^p variedad.

Para cada variedad X , sea $T(X)$ la unión disjunta de los espacios tangentes $T_x(X)$, y la proyección natural:

$$\pi : T(X) \rightarrow X$$

Sea (U, ϕ) una carta en X tal que $\phi(U)$ es un abierto de un espacio de Banach E . Entonces

$$\tau_U : \pi^{-1}(U) = T(U) \rightarrow U \times E$$

es una biyección que conmuta con la proyección en U , así

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\tau_U} U \times E$$

$$\begin{array}{c} \blacktriangleleft \quad \blacktriangleright \\ U \end{array}$$

Además, si (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) son dos cartas y denotando al mapeo $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ por ϕ_{ji} definido en $\phi_i(U_i \cap U_j)$, se obtienen mapeos de transición

$$\tau_{ji} = (\tau_j \tau_i^{-1}) : \phi_i(U_i \cap U_j) \times E \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times E$$

definidos por la fórmula

$$\tau_{ji}(x, v) = (\phi_{ji}(x), D(\phi_{ji})(x) \cdot v)$$

Como $D\phi_{ji}$ es un isomorfismo de clase C^{p-1} entonces en $T(X)$ se induce una estructura de C^{p-1} -variedad. Es claro que localmente, para subconjuntos abiertos U de un espacio de Banach, el haz tangente se puede identificar con el producto $U \times E$.

2.4. Variedad de información de Pistone y Sempi

Acorde con [21], [12], [1] y [2], a continuación se presentan los resultados de los trabajos de la variedad de información de Pistone y Sempi.

Dado el espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) , considérese el conjunto \mathfrak{M}_μ de todas las densidades de probabilidad estrictamente positivas, es decir,

$$\mathfrak{M}_\mu = \mathfrak{M}(\Omega, \Sigma, \mu) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \mu\text{-medible} : f > 0 \text{ casi siempre}, \int_\Omega f d\mu = 1 \right\}.$$

En [21], Pistone define una estructura de variedad diferenciable para \mathfrak{M}_μ que se presentará después de aclarar cierta terminología.

Para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, considérese la medida con densidad p denotada por $p \cdot \mu$, esto es, para cada $A \in \Sigma$ la medida $p \cdot \mu$ definida por

$$(p \cdot \mu)(A) = \int_A p d\mu.$$

Para la medida anterior se cumple que f es $(p \cdot \mu)$ -integrable, si y sólo si, fp es μ -integrable y en tal caso

$$\int f d(p \cdot \mu) = \int fp d\mu.$$

Para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$ se denota por E_p , al operador lineal que a cada variable aleatoria $u : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$, μ -medible, le asigna

$$E_p(u) = \int_\Omega u p d\mu.$$

Dada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, para cada una de las funciones ϕ_i definidas en la sección 2.1, se denota:

1. Por $\mathcal{W}_{\phi_i, p}$ al conjunto convexo $\{u \in L^1(p \cdot \mu) : E_p[\phi_i(u)] \leq 1\}$.
2. Por $L^{\phi_i}(p\mu)$ al espacio de funciones de Orlicz, dado por

$$L^{\phi_i}(p\mu) = \{u : \exists \alpha > 0, E_p[\phi_i(\alpha u)] < \infty\}$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{\phi_i, p} = \inf \left\{ r > 0 : E_p \left[\phi_i \left(\frac{u}{r} \right) \right] \leq 1 \right\}. \quad (2.65)$$

Para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, la **clase de Cramer en p** es el conjunto de variables aleatorias u definidas sobre $(\Omega, \Sigma, p \cdot \mu)$, tales que la función generadora de momentos de u , dada por:

$$\hat{u}_p(t) := \int_{\Omega} e^{tu} p d\mu = E_p(e^{tu}),$$

sea finita en una vecindad de cero.

En adelante, Ψ denotará a la función de Young ϕ_1 . La clase de Cramer construida para Ψ , denotada por B_p viene dada por

$$B_p = \left\{ u \in L^1(p \cdot \mu) \mid E_p[u] = 0 \right\} = \left\{ u \in M^\Psi(p) \mid \int_{\Omega} u p d\mu = 0 \right\},$$

el cual es espacio de Banach ya que B_p es un subespacio cerrado del espacio de Banach $L^1(p \cdot \mu)$.

Definición 2.4.1. 1. Si $r \in \mathfrak{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$, se dice que $\rho(\theta)$ es un modelo exponencial unidimensional, si existe un intervalo real abierto I que contiene a cero, tal que $\rho : I \longrightarrow \mathfrak{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$ con

$$\rho(\theta) = e^{\theta u - \phi(\theta)} r, \quad \theta \in I$$

2. Se dice que dos densidades de probabilidad p y q están relacionadas por un modelo exponencial si

$$q = \rho(\theta_0) \quad y \quad p = \rho(\theta_1)$$

donde θ varia en algún un intervalo real abierto $I = (\theta_i, \theta_j)$ que contiene a cero.

Para una función de densidad $p \in \mathfrak{M}_\mu$, la clase de Cramer en p es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\phi_i, p}$, definida por (2.65).

En términos probabilísticos, el conjunto $M^\Psi(p)$ tiene la característica dada por el siguiente hecho: $L^\Psi(p \cdot \mu)$ coincide con el conjunto de variables aleatorias u , para las que la función generadora de momentos $E_p(e^{tu})$ es finita, para todo número real t .

Es de resaltar que si dos densidades de probabilidad p y q en $\mathfrak{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$, están conectadas por un modelo exponencial $\rho(\theta) = e^{\theta u - \Phi(\theta)} r$, entonces son isomorfos los espacios $L^\Psi(p) \cong L^\Psi(q)$.

Las cartas del atlas serán definida sobre la bola abierta de radio 1, $\mathcal{W}_p = \left\{ u \in B_p \mid \|u\|_p \leq 1 \right\}$, siendo $\|u\|_p = \|u\|_{\Psi, p}$. Si $u \in \mathcal{W}_p$ y $q = \frac{e^u p}{E_p[e^u]}$ entonces:

1. la variable aleatoria e^u es $p\mu$ -integrable y $q \in \mathfrak{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$.
2. $L^\Psi(p\mu) \cong L^\Psi(q\mu)$.

Sea

$$e_p : \mathcal{W}_p \rightarrow \mathfrak{M}(\Omega, \Sigma, \mu),$$

tal que $e_p(u) = q = e^{u - K_p(u)} p$, para $u \in \mathcal{W}_p$. Esta función es uno a uno y su rango se denotará por \mathcal{U}_p , así que es biyección si se considera $e_p : \mathcal{W}_p \rightarrow \mathcal{U}_p$.

Considérese ahora

$$s_p : \mathcal{U}_p \rightarrow B_p,$$

de modo que

$$s_p(q) = \ln \left(\frac{q}{p} \right) - \int_{\Omega} \ln \left(\frac{q}{p} \right) p d\mu = \ln \left(\frac{q}{p} \right) - E_p \left[\ln \left(\frac{q}{p} \right) \right].$$

Se cumple que $s_p = e_p^{-1}$. Ahora bien, para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, el par (\mathcal{U}_p, s_p) es una cartas y dados $p_1, p_2 \in \mathfrak{M}_\mu$, las funciones de transición quedan definidas por

$$(s_{p_2} \circ s_{p_1}^{-1})(u) = u + \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) - E_{p_2} \left[u + \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right].$$

La colección de pares (\mathcal{U}_p, s_p) , con $p \in \mathfrak{M}_\mu$ constituirá un C^∞ -atlas para \mathfrak{M}_μ , el cual induce una topología sobre \mathfrak{M}_μ , a partir de las funciones s_p . Al respecto, el resultado significativo fué probar que estas cartas efectivamente definen una variedad infinito dimensional.

La derivada del mapeo de transición $s_{p_2} \circ e_{p_1}$, es

$$u \in B_{p_1} \rightarrow u - E_{p_2}[u] \in B_{p_2}, \quad (2.66)$$

el cual es un isomorfismo lineal topológico entre los espacios B_{p_1} y B_{p_2} . Por tanto la variedad puede considerarse modelada sobre el mismo espacio de Banach.

Tambien es importante resaltar que el atlas induce una topología equivalente a la topología de la convergencia exponencial en las sucesiones de \mathfrak{M}_μ . Dicha convergencia esta definida de la siguiente manera:

Definición 2.4.2. *La sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\mu$ converge exponencialmente (o es e-convergente) a $g \in \mathfrak{M}_\mu$ si $\{g_n\}$ tiende a g en μ -probabilidad y además, $\{\frac{g_n}{g}\}$ y $\{\frac{g}{g_n}\}$ son eventualmente convergentes en el siguiente sentido:*

$$\forall p > 1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} E_g \left[\left(\frac{g_n}{g} \right)^p \right] < \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} E_g \left[\left(\frac{g}{g_n} \right)^p \right] < \infty.$$

En el contexto de la variedad estadística de Pistone y Sempi, la importancia del haz tangente se presenta en dos direcciones:

- Los vectores tangentes a cada elemento de la variedad \mathfrak{M}_μ corresponden al concepto estadístico de probabilidad score.
- El espacio tangente en una densidad p esta identificado con los modelos exponenciales unidimensionales alrededor de p .

Sea p una densidad en \mathfrak{M}_μ y $g(t) : I \rightarrow \mathfrak{M}_\mu$ una curva regular tal que $g(t_o) = p$. Si $(\mathcal{U}_{p_1}, s_{p_1})$ es una carta para p entonces, el vector tangente a la curva en p es $u'_1(t_o)$, donde $u_1(t) = s_{p_1}^{-1}(g(t))$. Para otra carta $(\mathcal{U}_{p_2}, s_{p_2})$ los vectores tangentes están relacionados bajo la relación

$$(s_{p_2} \circ s_{p_1}^{-1})'[s_{p_1}(p)]u'_1(t_o) = u'_2(t_o).$$

La colección de vectores tangentes en p , via esta relación de equivalencia, es el espacio tangente en p de la variedad y debido al mapeo dado en 2.66 se tiene que $u_1 \in B_{p_1}$ es equivalente a tener $u_2 \in B_{p_2}$.

El respectivo haz tangente se denota por $T(\mathfrak{M}_\mu)$, para el cual un atlas está dado por los mapeos

$$(g, u) \in T(\mathcal{U}_p) \rightarrow (s_p(g), u - E_p[u])$$

y las funciones de transición de esta nueva variedad serán:

$$(u_1, v_1) \in \mathcal{U}_{p_1} \times B_{p_1} \rightarrow \left(u_1 + \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) - E_{p_2} \left[u_1 + \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right], v_1 - E_{p_2}[v_1] \right).$$

Un resultado importante está dado por la siguiente proposición expuesta en [12].

Sea g una curva regular que pasa por p y u su representación coordinada por una carta s_q . Entonces la función score de cualquier modelo exponencial unidimensional en p , es u y también cada $u \in B_p$ tiene dicho modelo exponencial unidimensional. Por tanto, el espacio de los modelos exponenciales unidimensionales es otra representación del espacio tangente en p .

Estos resultados son de vital importancia en el sentido de que no todas las parametrizaciones de alguna regularidad, definen una carta en el espacio tangente. Ejemplos de esta situación se encuentran en el trabajo de Pistone y Rogantin [12].

Considere ahora, dos densidades p y q en \mathfrak{M}_μ . Si $(\frac{q}{p}) \ln(\frac{q}{p})$ es $p \cdot \mu$ -integrable, entonces el contenido de información relativa de Kullback-Leiber, i.e la entropía relativa (Clásica: Shannon-Boltzman-Gibbs) de q respecto a p es el número

$$I(q||p) = E_q[\ln(\frac{q}{p})].$$

El cual es de la forma de las f -divergencias estudiadas en [17]. Este concepto está directamente relacionado con la estructura geométrica del espacio \mathfrak{M}_μ en el siguiente sentido (ver [12]):

Si $p \in \mathfrak{M}_\mu$ y $q \in \mathcal{U}_p$ y además $u = s_p(q)$ entonces:

- $K_p(u) = I(p||q)$
- $E_q[u] = K_p(u) + I(q||p)$

- Para cada $\hat{u} \in \mathcal{W}_p$ el máximo valor del mapeo

$$\hat{u} \rightarrow E_q \left[\ln \left(\frac{e_p(\hat{u})}{p} \right) \right]$$

se obtiene en el punto u y

$$\max_{\hat{u}} \left\{ E_q \left[\ln \left(\frac{e_p(\hat{u})}{p} \right) \right] \right\} = I(q||p).$$

Tambien que el mapeo coordenado de la variedad está definido entonces por

$$s_p(q) = \ln \left(\frac{q}{p} \right) + I(p||q).$$

Para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, si $\mathfrak{E}(p)$ es la componente conexa de \mathfrak{M}_μ que contiene a p y se denota

$$\mathcal{P} := \left\{ p \in L^1(\mu) : \int p d\mu = 1 \right\}$$

entonces,

$$\mathfrak{E}(p) \subset {}^* \mathfrak{E}(p) := \left\{ q \in \mathcal{P} : \frac{q}{p} \in L_{(p \cdot \mu)}^{\phi_3} \right\},$$

donde $L_{(p \cdot \mu)}^{\phi_3}$ es el espacio de Orlicz asociado a la función de Young

$$\phi_3(x) = (1 + |x|) \ln(1 + |x|) - |x|.$$

Un aspecto que caracteriza las densidades $p \in \mathfrak{M}_\mu$, es el siguiente [1]:

$$I(q||p) < \infty \iff q \in {}^* \mathfrak{E}(p).$$

De otra parte en [12] se tiene la siguiente proposición: Sea ${}^* B_p := \left\{ v \in L_{(p \cdot \mu)}^{\phi_3} : E_p[v] = 0 \right\}$.

- Todos los elementos ${}^* u \in {}^* B_p$ se identifican con un elemento u^* del espacio dual de B_p por la fórmula: $u^*(v) = E_p[{}^* u v]$ con $v \in B_p$. En particular, ${}^* B_p$ esta identificado con un subespacio propio de B_p^* y la inyección de ${}^* B_p$ en B_p^* es continua.
- Todos los elementos $u \in B_p$ se identifican (mediante sobreyección) con un elemento \bar{u} del espacio dual $({}^* B_p)^*$ de ${}^* B_p$ por la fórmula: $\bar{u}({}^* u) = E_p[{}^* u u]$, con ${}^* u \in {}^* B_p$.

Estas propiedades son de gran utilidad para extender el concepto de variedad exponencial al espacio de las densidades equivalentes según la medida de probabilidad μ , que no necesariamente sean estrictamente positivas. Esta extensión es una nueva variedad modelada sobre espacios de Banach, y su construcción puede consultarse en la tesis de Cena [1].

Capítulo 3

Variedad de información q -exponencial

3.1. Introducción

En este capítulo se planteará una q -deformación de la variedad de información de Pistone y Sempi [21], dicha q -deformación se denominará variedad de *información q -exponencial*. Para esto, considerando un espacio de medida (X, \mathfrak{X}, μ) y \mathfrak{M}_μ el espacio de todas las densidades de probabilidad estrictamente positivas y equivalentes respecto a μ , se procede como se indica a continuación.

En la sección 3.2 se define la conexión q -exponencial entre dos densidades de probabilidad de \mathfrak{M}_μ , como una q -deformación de la conexión exponencial, y además se muestra que \mathfrak{M}_μ está particionado en clases de equivalencia según modelos q -exponenciales paramétricos unidimensionales; con lo cual se podrá considerar la variedad a construir, como modelada sobre un espacio de Banach (salvo homeomorfismos).

En la sección 3.3 se retoma el funcional acumulante empleado en el trabajo de Pistone y Rogantin [12]. Se muestra que dicho funcional es analítico en el interior de su dominio propio; lo cual será condición necesaria para probar que ciertas funciones son isomorfismos de clase \mathcal{C}^∞ y por ello tendrán sentido como mapeos de transición de la variedad. Los resultados de esta sección fueron expuestos en el trabajo de Pistone y Rogantin [12] y en esta memoria se presentan agregando algunos detalles adicionales en las pruebas.

En la sección 3.4 se construye la variedad de información q -exponencial; propiamente, en \mathfrak{M}_μ se induce una estructura geométrica a través del modelo q -exponencial no paramétrico. Esta definición esta relacionada con una cierta clase de variables aleatorias “ q -exponencialmente integrables” cuya topología será dada por espacios de Orlicz asociados a la medidas $p \cdot \mu$ (con $p \in \mathfrak{M}_\mu$) y a la función de Young Φ_1 que se define mediante 3.2 en la sección 3.4. La nueva variedad infinito-dimensional de clase \mathcal{C}^∞ , induce sobre \mathfrak{M}_μ una topología equivalente a la topología de la e -convergencia de Pistone.

3.2. Modelo q -exponencial

En estadística, un modelo es una distribución de probabilidad la cual depende de un cierto número de parámetros. Dado que para la física estadística, usualmente estos parámetros son la energía total U en el ensamble microcanónico o el inverso de la temperatura β en el ensamble canónico y que la motivación del presente trabajo es caracterizar la entropía relativa de Tsallis, es conveniente establecer un tipo de modelo paramétrico unidimensional basado en exponenciales q -deformados. Lo anterior se presenta después de una q -deformación de la clase de Cramer [12], que como es usual, plantea el contexto para las definiciones de modelos exponenciales. Se denotará por $E_{p \cdot \mu}[\cdot]$ la esperanza respecto a la medida de probabilidad con densidad p , que se denota $p \cdot \mu$. Sin lugar a ambigüedades se escribirá $E_{p \cdot \mu}[\cdot] \equiv E_p[\cdot]$.

Definición 3.2.1. Sea u una variable aleatoria respecto a $(X, \mathfrak{X}, p \cdot \mu)$. Se define una q -deformación de la función generadora de momentos, como $\hat{u}_p^q : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que

$$\hat{u}_p^q(t) := \int_X \frac{e_q^{tu} + e^{tu}}{2} p d\mu = E_p \left[\frac{e_q^{tu} + e^{tu}}{2} \right] \quad \text{con } 0 < q < 1. \quad (3.1)$$

i.e. es la media entre la q -transformada de Laplace y la transformada de Laplace de la función de densidad de la variable aleatoria u con respecto a la medida de probabilidad $p \cdot \mu$. Para cada densidad $p \in \mathfrak{M}_\mu$, la q -clase de Crámer en p , denotada por \mathcal{C}_p , es el conjunto de las variables aleatorias u respecto a $(X, \mathfrak{X}, p \cdot \mu)$, tales que $\hat{u}_p^q < \infty$ en una vecindad de cero. El subconjunto de \mathcal{C}_p que consiste de todas las variables aleatorias u con esperanza cero (respecto a $p \cdot \mu$), se denominará clase de Crámer centrada en p y se denotará por \mathcal{B}_p ; es decir,

$$\mathcal{B}_p = \{u \in \mathcal{C}_p : E_p[u] = 0\}.$$

Definición 3.2.2.

1. Dado $p \in \mathfrak{M}_\mu$, se dice que una función f es un modelo q -exponencial unidimensional si existen $u \in \mathcal{C}_p$, una función real de variable real Ψ tales que para todo t en un intervalo abierto I que contenga a cero, se cumple que

$$f(t) = e_q^{tu \ominus_q \Psi(t)} p.$$

2. Se dice que dos densidades de probabilidad $p, z \in \mathfrak{M}_\mu$ están relacionadas por un modelo q -exponencial unidimensional, si existen $r \in \mathfrak{M}_\mu$, $u \in \mathcal{C}_r$, una función real de variable real ψ y $\delta > 0$ tales que para todo $t \in (-\delta, \delta)$, la función definida por

$$f(t) = e_q^{\left(\frac{tu - \psi(t)}{1 + (1-q)\psi(t)}\right)} r = e_q^{tu \ominus_q \psi(t)} r$$

cumple que existen $t_0, t_1 \in (-\delta, \delta)$ tales que $p = f(t_0)$ y $z = f(t_1)$.

El espacio \mathfrak{M}_μ queda particionado en clases de equivalencia según la siguiente relación:

Dadas $p, z \in \mathfrak{M}_\mu$ decimos que $p \sim z$ si y sólo si p y z están relacionadas por un modelo q -exponencial unidimensional. Esta relación de equivalencia es una condición necesaria para que el atlas de \mathfrak{M}_μ sea modelado sobre espacios de Banach.

El modelo q -exponencial unidimensional es una q -deformación del modelo exponencial, que se motiva en el de Boltzman-Gibbs,

$$f_\beta(x) = \exp(-\ln Z(\beta) - \beta H(x))c(x),$$

donde $H(x)$ es el Hamiltoniano del sistema y $Z(\beta)$ es la constante de normalización. En [20] se prueba que el modelo de Boltzman-Gibbs pertenece a la familia de modelos exponenciales.

De otro lado, para caracterizar \mathcal{C}_p mediante espacios de Orlicz, es necesario tomar una función de Young adecuada. La elección de dicha función se relaciona con la topología que se considerará en \mathfrak{M}_μ , cuando se introduzca la variedad q -exponencial. La relación se hace explícita en la prueba de la proposición 3.4.1 de la sección 3.4; que permite la consideración, en \mathcal{M}_μ , de la convergencia exponencial definida por Pistone y Sempi [21]. Dado $0 < q < 1$, la función de Young que servirá para tales fines, se define por

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2} \left(e_q^x + \frac{1}{e^x} \right) - 1, \quad \text{para } x \geq 0 \quad \text{y} \quad \Phi_1(x) = \Phi_1(-x), \quad \text{para } x < 0. \quad (3.2)$$

De ahora en adelante, siempre que se escriba Φ_1 será para hacer referencia a la función de Young anterior. Dado que en este trabajo aparecerá repetidas veces la expresión $\frac{e_q^x + e^{-x}}{2}$, se denotará

$$c_q(x) := \frac{e_q^x + e^{-x}}{2},$$

que resulta ser una opción de q -deformación (distinta a $\cosh_q(\cdot)$) de la función coseno hiperbólico usual.

Proposición 3.2.1. *Para cada densidad $p \in \mathfrak{M}_\mu$, se tiene que \mathcal{C}_p es subconjunto del espacio $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$.*

Demostración. De la teoría de espacios de Orlicz se tiene que

$$\begin{aligned} L^{\Phi_1}(p \cdot \mu) &= \left\{ u \text{ medible} : \int \Phi_1(\alpha u) d(p \cdot \mu) < +\infty, \text{ para algún } \alpha \right\} \\ &= \left\{ u \text{ medible} / E_p[\Phi_1(\alpha u)] < +\infty \text{ para algún } \alpha \right\} \end{aligned}$$

es un espacio de Banach con la norma de Luxemburgo

$$\|u\|_{\Phi_1, p} := \inf \left\{ \kappa > 0 / E_p \left[\Phi_1 \left(\frac{|u|}{\kappa} \right) \right] \leq 1 \right\}.$$

Sea $u \in \mathcal{C}_p$ entonces, para todo real t en una vecindad de cero, sucede que

$$E_p \left[\frac{e_q^{tu} + e^{tu}}{2} \right] < +\infty.$$

De tal forma. $E_p[e_q^{tu}] < +\infty$ y $E_p[e^{tu}] < +\infty$, para todo real t en una vecindad G de cero. De lo anterior, considerando una vecindad simétrica de cero incluida en G y llamando $r = \frac{1}{t}$ para algún t en la vecindad simétrica, se tiene que existe $r > 0$ tal que $E_p[e_q^{\frac{|u|}{r}}] < +\infty$ y $E_p[e^{-\frac{|u|}{r}}] < +\infty$. En consecuencia

$$E_p \left[\frac{e_q^{\frac{|u|}{r}} + e^{-\frac{|u|}{r}}}{2} - 1 \right] < +\infty,$$

es decir, existe $r > 0$ tal que

$$E_p \left[\Phi_1\left(\frac{|u|}{r}\right) \right] < +\infty$$

y por tanto $u \in L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$.

□

El resultado del próximo lema es fundamental para el planteamiento de la variedad q -exponencial como variedad modelada sobre un espacio de Banach. En la prueba de dicho lema, será necesaria la siguiente equivalencia: si $\|u\|_{\Phi_1, p} < 1$ entonces

$$E_p[c_q(\alpha u) - 1] \leq 1 \iff E_p[c_q(\alpha u)] \leq 2. \quad (3.3)$$

En efecto, si $\|u\|_{\Phi_1, p} < 1$ entonces

$$\inf \left\{ \kappa > 0 / E_p[\Phi_1(\frac{u}{\kappa})] \leq 1 \right\} < 1,$$

y en consecuencia existe $\alpha > 1$ tal que

$$E_p[c_q(\alpha u) - 1] \leq 1 \iff E_p[c_q(\alpha u)] - \int p d\mu \leq 1.$$

Puesto que $(X, \mathfrak{X}, p \cdot \mu)$ es un espacio de probabilidad se sigue

$$E_p[c_q(\alpha u)] - \int p d\mu = E_p[c_q(\alpha u)] - 1$$

y por lo tanto se cumple 3.3.

Lema 3.2.1. Sean $p, z \in \mathfrak{M}_\mu$ dos densidades de probabilidad relacionadas por un modelo q -exponencial unidimensional. Entonces

1. $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu) = L^{\Phi_1}(z \cdot \mu)$
2. El mapeo identidad, $id : (L^{\Phi_1}(p \cdot \mu), \|\cdot\|_{\Phi_1, p}) \rightarrow (L^{\Phi_1}(z \cdot \mu), \|\cdot\|_{\Phi_1, z})$ es un homeomorfismo.

Demostración. Sean $p, z \in \mathfrak{M}_\mu$ dos densidades de probabilidad relacionadas por un modelo q -exponencial unidimensional. Así, existen $r \in \mathfrak{M}_\mu$, $u \in \mathcal{C}_r$, una función real de variable real ψ y $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (-\delta, \delta)$ la función definida por

$$f(t) = e_q^{\left(\frac{tu - \psi(t)}{1 + (1-q)\psi(t)}\right)} r = e_q^{tu \ominus_q \psi(t)} r$$

cumple que existen $t_0, t_1 \in (-\delta, \delta)$ tales que $p = f(t_0)$ y $z = f(t_1)$. Se asume sin pérdida de generalidad que $t_0 < t_1$.

Dado que la relación q -exponencial entre variables aleatorias es simétrica, para probar el numeral 1 basta con demostrar que $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu) \subset L^{\Phi_1}(z \cdot \mu)$.

Sea $w \in L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$. Se debe probar que existe un $\beta > 0$ tal que $E_z[\Phi_1(\beta w)] < \infty$.

Antes de elegir el real β , nótese que para todo $\beta > 0$ se cumple que

$$\begin{aligned}
 E_z[c_q(\beta w)] &= \int c_q(\beta w) z \, d\mu \\
 &= \int c_q(\beta w) e_q^{[t_1 u \ominus_q \psi(t_1)]} r \, d\mu \\
 &= E_r[c_q(\beta w) e_q^{[t_1 u \ominus_q \psi(t_1)]}] \\
 &= E_r \left[c_q(\beta w) \frac{e_q^{t_1 u}}{e_q^{\Psi(t_1)}} \right] \\
 &= \frac{E_r[c_q(\beta w) e_q^{t_1 u}]}{e_q^{\Psi(t_1)}}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ahora, de la relación q -exponencial con $t = t_1$, se tiene que $z = e_q^{t_1 u \ominus_q \Psi(t_1)} r$ y por propiedad 2.42 se sigue que

$$\frac{z}{r} = e_q^{t_1 u \ominus_q \Psi(t_1)} = \frac{e_q^{t_1 u}}{e_q^{\Psi(t_1)}}.$$

Por tanto

$$e_q \Psi(t_1) = E_z[e_q \Psi(t_1)] = E_z\left[\frac{r}{z} e_q^{t_1 u}\right] = E_r[e_q^{t_1 u}].$$

De lo anterior y de 3.4 se tiene que

$$E_z[c_q(\beta w)] = \frac{E_r[c_q(\beta w) e_q^{t_1 u}]}{E_r[e_q^{t_1 u}]} \tag{3.5}$$

El numerador de la expresión anterior, involucra la función definida por

$$g(\theta, t) = E_r[c_q(\theta w)e_q^{tu}].$$

A continuación se analiza un dominio para la función g , en el cual g asuma valores finitos.

Si $\theta = 0$ entonces $g(0, t) = E_r[e_q^{tu}] < +\infty$, ya que $u \in L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$ (es decir, u está en la clase de Cramer en p).

Si $t = t_0$ entonces

$$\begin{aligned} g(\theta, t_0) &= E_r[c_q(\theta w)e_q^{t_0 u}] \\ &= \int c_q(\theta w)e_q^{t_0 u} r d\mu. \end{aligned}$$

Ahora, en forma análoga que en 3.5 se tiene

$$E_p[c_q(\theta w)] = \frac{E_r[c_q(\theta w)e_q^{t_0 u}]}{E_r[e_q^{t_0 u}]}.$$

Así, en la expresión que define a g se obtiene

$$g(\theta, t_0) = E_p[c_q(\theta w)]E_r[e_q^{t_0 u}].$$

Es claro, que

$$g(\theta, t_1) = E_p[c_q(\theta w)]E_r[e_q^{t_1 u}].$$

Ahora bien, puesto que $w \in L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$, existe $\bar{\theta} > 0$ tal que $E_p[\Phi_1(\bar{\theta}w)] < \infty$ y por 3.3 se sigue que $E_p[c_q(\bar{\theta}w)] < \infty$. Mas aún, para todo $\theta \in (-\bar{\theta}, \bar{\theta})$ se cumple que $E_p[\Phi_1(\theta w)] < \infty$ y por tanto en dicho intervalo se garantiza que $g(\theta, t_0) < \infty$.

Sean $\theta \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$, $\alpha \in [0, \bar{\theta}]$ y $b > t_1$ con $b \in [-\delta, \delta]$, para algún $\delta > 0$. En consecuencia, la función $t \rightarrow g(0, t)$ es finita en $[t_0, b]$ y la función $\theta \rightarrow g(\theta, t_0)$ es finita en $[-\alpha, \alpha]$.

De este modo, el mapeo $(\theta, t) \rightarrow g(\theta, t)$ es finito en la región triangular cuyos vértices son los puntos (α, t_0) , $(0, b)$ y $(-\alpha, t_0)$ ya que este mapeo es convexo. La figura 3.1 muestra la región triangular en la cual se cumple que $g(\theta, t)$ es finito. Respecto a dicha región se elige β de la siguiente manera:

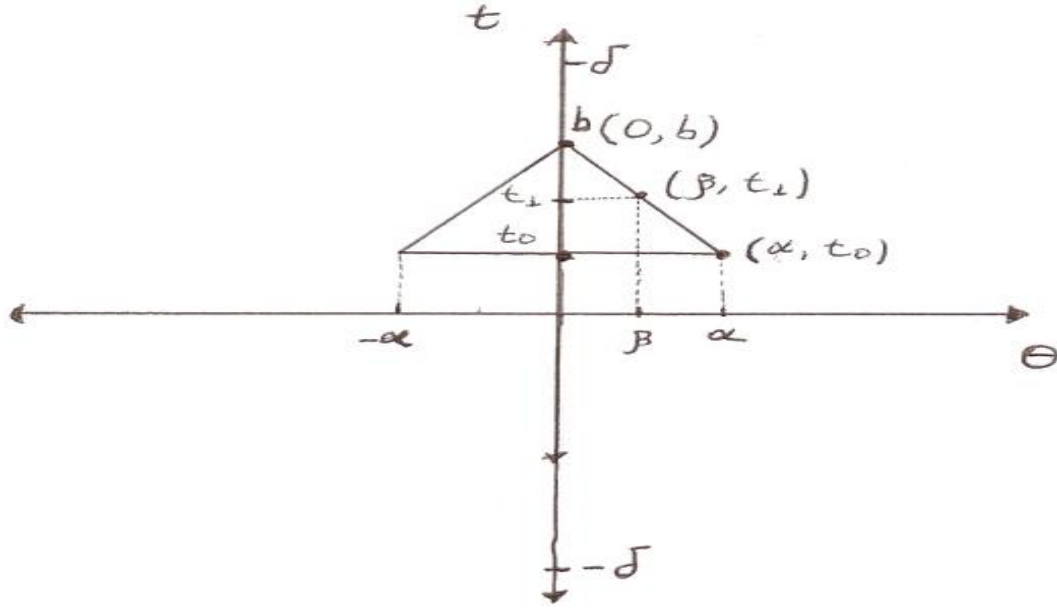


Figura 3.1:

considerando que la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, b)$ y (α, t_0) es

$$t - b = \left(\frac{t_0 - b}{\alpha} \right) \theta$$

se elige β como la preimagen de t_1 bajo la función correspondiente a dicha recta. En tal caso se tiene que $\beta > 0$ y además

$$\frac{t_1 - b}{t_0 - b} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Dada la convexidad de $g(\theta, t)$ se sigue

$$g(\beta, t_1) \leq \eta g(\alpha, t_0) + (1 - \eta)g(0, t_0)$$

y tomando $1 - \eta = \frac{\beta}{\alpha}$, se tiene:

$$\begin{aligned} g(\beta, t_1) &\leq \frac{t_0 - t_1}{t_0 - b} g(\alpha, t_0) + \frac{t_1 - b}{t_0 - b} g(0, t_0) \\ E_z[c_q(\beta w)] E_r[e_q^{t_1 u}] &\leq \frac{t_0 - t_1}{t_0 - b} E_p[c_q(\alpha w)] E_r[e_q^{t_0 u}] + \frac{t_1 - b}{t_0 - b} E_r[e_q^{t_0 u}] \\ E_z[c_q(\beta w)] &\leq \frac{t_0 - t_1}{t_0 - b} E_p[c_q(\alpha w)] \frac{E_r[e_q^{t_0 u}]}{E_r[e_q^{t_1 u}]} + \frac{t_1 - b}{t_0 - b} \frac{E_r[e_q^{t_0 u}]}{E_r[e_q^{t_1 u}]} \end{aligned}$$

De lo anterior, $E_z[c_q(\beta w)] < +\infty$ y por 3.3 $E_z[\Phi_1(\beta w)] < +\infty$, lo cual implica que $w \in L^{\Phi_1}(z \cdot \mu)$ o bien $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu) \subset L^{\Phi_1}(z \cdot \mu)$.

Hasta este punto el sentido de la igualdad entre los espacios es conjuntista. Se probará ahora el numeral 2.

Para probar que el mapeo id es un homeomorfismo es suficiente con probar su continuidad, pues por la prueba anterior se tiene que está bien definido, y por simetría se obtiene la continuidad de su inversa.

Razonando por el absurdo, supóngase que el mapeo id no es continuo. Por tanto existe una $\{y_n\}$ sucesión en $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$, convergente a cero en norma $\|\cdot\|_{\Phi_1, p}$ y no convergente a cero en norma $\|\cdot\|_{\Phi_1, z}$. En consecuencia, existen $\epsilon > 0$ y $\{u_n\}$ una subsucesión de $\{y_n\}$, tal que para todo natural n se cumple que

$$\|u_n\|_{\Phi_1, z} > \epsilon. \quad (3.6)$$

La convergencia en norma garantiza que existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ tal que para cada natural k se cumple que

$$\|u_{n_k}\|_{\Phi_1, p} < \frac{1}{2^k}.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|k u_{n_k}\|_{\Phi_1, p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \infty$$

y $(L^{\Phi_1}(p \cdot \mu), \|\cdot\|_{\Phi_1, p})$ es un espacio completo, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k|u_{n_k}|$ converge en norma. Sea $r \in L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} k|u_{n_k}| = r$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $r_m \in L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$ la suma parcial $r_m = \sum_{k=1}^m k|u_{n_k}|$. Claramente la sucesión $\{r_m\}$ converge a r en norma $\|\cdot\|_{\Phi_1, p}$. Para cada $k > 0$, $k|u_{n_k}| \leq r_m$ con $m \geq k$.

Es claro que para todo natural k , se cumple

$$|u_{n_k}| < \frac{r}{k}$$

y como la norma $\|\cdot\|_{\Phi_1, z}$ es monótona (en sentido reticular) se tiene que

$$\|u_{n_k}\|_{\Phi_1, z} < \frac{1}{k} \|r\|_{\Phi_1, z} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

lo cual es una contradicción con el supuesto en 3.6.

Por lo tanto el mapeo identidad es continuo y, por simetría, es un homeomorfismo. \square

3.3. Analiticidad del Funcional acumulante

Esta sección presenta el estudio del funcional acumulante K_p , realizado en trabajos de Pistone [12], [1]. Precisamente, se presenta un enfoque (tal como en [12], [1] y ampliando algunos detalles en las pruebas) para probar que dicho funcional es analítico en su dominio propio y se presentan algunos resultados sobre diferenciabilidad que serán útiles más adelante. La analiticidad de K_p será necesaria en el presente trabajo, para probar que las funciones de transición para la variedad a construir en la siguiente sección, son precisamente isomorfismos. En esta sección, Ψ denota la función de Young ϕ_1 definida en la sección 2.1.

Definición 3.3.1. *El funcional generador de momentos*

$$M_p : L^\Psi(p \cdot \mu) \rightarrow [0, +\infty]$$

está definido por

$$M_p(u) = E_p(e^u). \quad (3.7)$$

Para este funcional Pistone y Sempì (1995) probaron que es Gâteaux-diferenciable en el interior de su dominio y también que es infinitamente Fréchet-diferenciable en la bola unidad $B(0, 1) \subset L^\Phi(p \cdot \mu)$. En la tesis de Cena [1], se prueba además su analiticidad en $B(0, 1)$. Para ver esto, se comenzará con algunas propiedades importantes de funciones analíticas entre espacios de Banach.

3.3.1. Mapeos analíticos entre espacios de Banach

Sean E y F espacios de Banach. Como es usual $L(E, F)$ es el espacio de Banach de los mapeos lineales y continuos de E en F , $L^n(E, F)$ el espacio de Banach de los mapeos n -multilineales y continuos de E^n en F . El subconjunto de aquellos mapeos de $L^n(E, F)$ que sean simétricos se denotará por $L_s^n(E, F)$.

Definición 3.3.2. *Una función $\hat{\lambda} : E \rightarrow F$ entre espacios de Banach es llamada continua polinomial n -homogénea si existe $\lambda \in L_s^n(E, F)$ tal que*

$$\hat{\lambda}(x) := \lambda x^n, \quad \forall x \in E.$$

Sea $\mathcal{P}^n(E, F)$ el espacio vectorial de los mapeos continuos polinomiales n -homogéneos de E^n en F . Sea $\mathcal{P}^0(E, F) := F$.

La función simétrica n -multilineal λ está determinada en forma única por $\hat{\lambda}$; de hecho, $D^n \hat{\lambda} = n! \lambda$ es llamada la forma polar de $\hat{\lambda}$.

Dotemos a $\mathcal{P}^n(E, F)$ con la norma

$$\|\hat{\lambda}\|_{p^n} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|\hat{\lambda}(x)\|}{\|x\|^n} = \sup_{\|x\|=1} \|\hat{\lambda}(x)\|.$$

Claramente $\|\hat{\lambda}\|_{p^n} \leq \|\lambda\|_{L^n}$. También existe una inecuación de la forma

$$\|\hat{\lambda}\|_{p^n} \leq \|\lambda\|_{L^n} \leq \frac{n^n}{n!} \|\hat{\lambda}\|_{p^n}, \quad (3.8)$$

es decir, las normas son equivalentes.

Definición 3.3.3. Sea $\{\hat{\lambda}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $\hat{\lambda}_n \in \mathcal{P}^n(E, F)$. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}_n$$

es llamada serie de potencias de E en F . Su radio de convergencia $\hat{\rho}$ está definido como

$$\hat{\rho} := \sup \left\{ r \in [0, \infty) : \sum_{n=0}^{\infty} \|\hat{\lambda}_n\|_{p^n} r^n < \infty \right\}.$$

El radio de convergencia restringida ρ se define como

$$\rho := \sup \left\{ r \in [0, \infty) : \sum_{n=0}^{\infty} \|\hat{\lambda}_n\|_{L^n} r^n < \infty \right\}.$$

De la fórmula de Cauchy-Hadamard se tiene:

$$\frac{1}{\hat{\rho}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \hat{\lambda}_n \right\|_{p^n}^{\frac{1}{n}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \lambda_n \right\|_{L^n}^{\frac{1}{n}}.$$

De la inecuación 3.8 y ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = e$, se tiene

$$\frac{\hat{\rho}}{e} \leq \rho \leq \hat{\rho}.$$

La inecuación $\|\hat{\lambda}_n(x)\| \leq \|\hat{\lambda}_n\|_{p^n} \|x\|^n$ implica que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}_n(x)$ converge absoluta y uniformemente en la bola cerrada $\overline{B}(0, r)$ para cada $r < \hat{\rho}$, más aún (Proposición 1.4 de Upmeyer [31]),

$$\hat{\rho} = \sup \left\{ r : \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}_n(x) \text{ converge uniformemente para } \|x\| \leq r \right\}.$$

De igual forma, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x_1, \dots, x_n)$ converge uniformemente para cada sucesión $\{x_m\}_{m \geq 1}$ tal que $\sup\{\|x_m\|\} \leq r$ con $r < \rho$ fijo y

$$\rho = \sup \left\{ r : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x_1, \dots, x_n) \text{ conv. unif. para todo } \{x_m\}_{m \geq 1} \text{ tal que } \sup \|x_m\|_E \leq r \right\}.$$

Definición 3.3.4. Sean E y F espacios de Banach y $U \subset E$ abierto. Un mapeo $f : U \rightarrow F$ se denomina analítico si para cada $x_0 \in U$ existe una serie de potencias convergente con radio de convergencia positivo tal que, para cada x en una vecindad de x_0 ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}_n (x - x_0)^n. \quad (3.9)$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}_n$ es una función analítica en la bola $B(0, \rho)$ de convergencia restringida.

Una función analítica f es infinitamente diferenciable si f tiene la expansión en series 3.9. En tal caso $D^k f(x_0) = k! \lambda_k$ y $D^k f$ tiene la siguiente expansión en serie centrada en x_0

$$D^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!} \lambda_{k+n} ((x - x_0)^n, \cdot). \quad (3.10)$$

Las series en el miembro derecho en 3.9 y 3.10 tienen el mismo radio de convergencia restringida ρ .

Teorema 3.3.1. Sean E y F espacios de Banach y $U \subset E$ abierto. Sea $f : U \rightarrow F$ una función suave. Si existe una constante M tal que, para todo $x \in B(x_0, r) \subset U$

$$\|D^n f(x)\|_{L^n} \leq \frac{Mn!}{r^n},$$

entonces f tiene una representación en serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n f(x_0) (x - x_0)^n$$

y f es analítica en $B(x_0, r)$.

Teorema 3.3.2. Sean E, F, G espacios de Banach, $U \subset E$ y $V \subset F$ abiertos. Si $f : U \rightarrow F$ y $g : V \rightarrow G$ son funciones analíticas tales que $f(U) \subset V$ entonces $g \circ f$ es también una función analítica.

3.3.2. La función exponencial $\exp_{p,a}$

En esta sección se definirá una función analítica entre la bola unidad $B(0, 1)$ del espacio de Orlicz $L^\Phi(p \cdot \mu)$ y el espacio de Lebesgue $L^a(p \cdot \mu)$.

Lema 3.3.1. En el espacio de Orlicz $L^\Phi(p \cdot \mu)$ con la norma de Luxemburgo y en forma análoga que en 3.3, se tiene:

$$\|u\|_\Phi \leq 1 \Leftrightarrow E_p(\cosh(u)) \leq 2.$$

Demostración. Como la función Φ es estrictamente creciente y continua en $[0, \infty)$, entonces el mapeo $k \in (0, \infty) \rightarrow E_p(\Phi(\frac{u}{k})) \in \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente para cada $u \in L^\Phi(p \cdot \mu)$ diferente de cero y

$$\|u\|_\Phi \leq 1 \Leftrightarrow E_p(\Phi(u)) \leq 1 \Leftrightarrow E_p(\cosh(u)) \leq 2.$$

□

Lema 3.3.2. Para cada $a \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ y u en la bola unidad abierta B_Ψ de $L^\Psi(p \cdot \mu)$, sea $\lambda_{a,n}(u)$ definida por:

$$\begin{aligned} \lambda_{a,n}(u) : \quad L^\Psi(p \cdot \mu) \times \dots \times L^\Psi(p \cdot \mu) &\rightarrow L^a(p \cdot \mu) \\ (w_1, \dots, w_n) &\rightarrow \frac{w_1}{a} \dots \frac{w_n}{a} e^{\frac{u}{a}} \end{aligned}$$

Entonces la función $\lambda_{a,n}(u)$ es continua, simétrica y n -multilineal.

Demostración. Sea $r = n^{-1}(1 - \|u\|_\Psi)$. Para cada $v_1, \dots, v_n \in L^\Psi(p \cdot \mu)$ con $\|v_i\|_\Psi = 1$, se tiene

$$\left\| u + r \sum_{i=1}^n |v_i| \right\|_\Psi \leq \|u\|_\Psi + rn = 1,$$

así $u + r \sum_{i=1}^n |v_i| \in \overline{B}_\Psi(0, 1)$.

Ya que $\frac{|x|^a}{a} < e^{|x|}$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y por el Lemma 3.3.1., se tiene

$$\begin{aligned} \int \left| r \frac{v_1}{a} \dots r \frac{v_n}{a} \right|^a e^u p d\mu &= \int \left| r \frac{v_1}{a} \right|^a \dots \left| r \frac{v_n}{a} \right|^a e^u p d\mu \\ &\leq E_p \left[e^{u + r \sum_{i=1}^n |v_i|} \right] \\ &\leq 2E_p \left[\cosh \left(u + r \sum_{i=1}^n |v_i| \right) \right] \leq 4. \end{aligned}$$

Así,

$$\int \left| \frac{v_1}{a} \dots \frac{v_n}{a} e^{\frac{u}{a}} \right|^a p d\mu \leq \frac{4}{r^{na}} = \frac{4n^{na}}{(1 - \|u\|_\Psi)^{na}} = C_n(u) < \infty. \quad (3.11)$$

Para $w_1, \dots, w_n \in L^\Psi(p \cdot \mu)$, distintos de cero, sean $v_i = \frac{w_i}{\|w_i\|_\Psi}$; entonces

$$\int \left| \frac{w_1}{a} \dots \frac{w_n}{a} e^{\frac{u}{a}} \right|^a p d\mu = \|w_1\|_\Psi^a \dots \|w_n\|_\Psi^a E_p \left[\left| \frac{v_1}{a} \dots \frac{v_n}{a} e^{\frac{u}{a}} \right|^a \right]. \quad (3.12)$$

Ahora, por las ecuaciones 3.11 y 3.12 se sigue que

$$\begin{aligned} \|\lambda_{a,n}(u)(w_1, \dots, w_n)\|_{L^a} &= \left(\int \left| \frac{w_1}{a} \cdots \frac{w_n}{a} e^{\frac{u}{a}} \right|^a p d\mu \right)^{\frac{1}{a}} \\ &\leq (C_n(u))^{\frac{1}{a}} \|w_1\|_{\Psi} \cdots \|w_n\|_{\Psi}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

y por tanto, $\lambda_{a,n}(u) \in L_s^n(L^{\Phi}(p \cdot \mu), L^a(p \cdot \mu))$. \square

Note que si $u \in B_{\Psi}$, entonces $e^{\frac{u}{a}} \in L^a(p \cdot \mu)$. De hecho, como $\|u\|_{\Psi} < 1$ se tiene

$$\int \left| e^{\frac{u}{a}} \right|^a p d\mu \leq E_p[e^{|u|}] \leq 2E_p[\cosh(|u|)] \leq 2E_p \left[\cosh \left(\frac{|u|}{\|u\|_{\Psi}} \right) \right] \leq 4. \quad (3.14)$$

Definición 3.3.5. Para cada $a \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ y $u \in B(0, 1)$, sea,

$$\hat{\lambda}_{a,0}(u) := e^{\frac{u}{a}}$$

con $\hat{\lambda}_{a,0}(u) \in \mathcal{P}^n(L^{\Psi}(p \cdot \mu), L^a(p \cdot \mu))$ para $n \geq 1$ el polinomio n -homogéneo determinado por la forma polar $\lambda_{a,n}(u)$ definida en el lema anterior.

Proposición 3.3.1. Sea $p \in \mathfrak{M}_{\mu}$ y $a \geq 1$. La serie

$$A(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{v}{a} \right)^n$$

es una serie de potencias de $L^{\Psi}(p \cdot \mu)$ en $L^a(p \cdot \mu)$ con radio de convergencia $\hat{\rho} \geq 1$.

Demostración. La prueba se sigue del Lemma 3.3.2 y de la expresión 3.14. \square

Definición 3.3.6. Para cada $a \geq 1$ y para cada densidad $p \in \mathfrak{M}_{\mu}$, la función exponencial $\exp_{p,a}$ está dada por

$$\begin{aligned} \exp_{p,a} : B(0, 1) &\rightarrow L^a(p \cdot \mu) \\ v &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{v}{a} \right)^n \end{aligned}$$

Sea $v \in B_{\Psi} \subset L^{\Psi}(p \cdot \mu)$. Se sabe que, en forma puntual, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{v}{a} \right)^k = e^{\frac{v}{a}}$.

Como $p \cdot \mu$ es una medida finita, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{v}{a} \right)^k \rightarrow e^{\frac{v}{a}}$ en $p \cdot \mu$ -probabilidad. La proposición anterior muestra que converge a $\exp_{p,a}$ en norma $\|\cdot\|_{L^a}$. Por tanto, se tiene su convergencia a $\exp_{p,a}$ en $L^a(p \cdot \mu)$. Puesto que esta convergencia implica convergencia en medida (Pistone y Sempì [21]), $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{v}{a} \right)^k \rightarrow \exp_{p,a}(v)$ en $p \cdot \mu$ -probabilidad y, por unicidad,

$$\exp_{p,a}(v) = e^{\frac{v}{a}}.$$

Proposición 3.3.2. *La función $\exp_{p,a}$ satisface las siguientes propiedades:*

- $\exp_{p,a}(0) = 1$

- para cada $u, v \in B(0, 1)$, tal que $u + v \in B(0, 1)$

$$\exp_{p,a}(u + v) = \exp_{p,a}(u)\exp_{p,a}(v)$$

- para cada $u \in B(0, 1)$, $\exp_{p,a}$ tiene una inversa en $L^a_{(p,\mu)}$ y

$$(\exp_{p,a}(u))^{-1} = \exp_{p,a}(-u).$$

Teorema 3.3.3. *Sea $p \in \mathfrak{M}_\mu$ y $a \geq 1$. La función $\exp_{p,a}$ es analítica. En una vecindad de cada $x_0 \in B(0, 1)$, se puede expandir en la serie de Taylor*

$$\exp_{p,a}(u_0 + u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{a}\right)^n e^{\frac{u_0}{a}}.$$

3.3.3. Analiticidad del funcional acumulante

Ahora se demostrarán algunas propiedades del funcional M_p , las cuales serán necesarias para la caracterización de la variedad de información q -exponencial. Nótese que M_p restringido a la bola unidad B_Ψ , coincide con $E_p \circ \exp_{p,1}$.

Teorema 3.3.4. *El funcional generador de momentos M_p satisface las siguientes propiedades:*

1. $M_p(0) = 1$; para cada $u \neq 0$, $M_p(u) > 1$;
2. es convexo y semicontinuo inferior y su dominio propio

$$\text{dom}(M_p) = \{u \in L^\Psi(p \cdot \mu) : M_p(u) < \infty\}$$

es un conjunto convexo que contiene a la bola unidad B_Ψ de $L^\Psi(p \cdot \mu)$;

3. es infinitamente Gâteaux-diferenciable en el interior de su dominio propio y la n -ésima derivada en $u \in \text{Int}\left\{\text{dom}(M_p)\right\}$ en la dirección $v \in L^\Psi(p \cdot \mu)$ es

$$\frac{d^n}{dt^n} M_p(u + tv)|_{t=0} = E_p(v^n e^u);$$

4. es acotado, infinitamente Fréchet-diferenciable y analítico en la bola unidad de $L^\Psi(p \cdot \mu)$, la n -ésima derivada en $u \in B_\Psi$ evaluada en $(v_1, \dots, v_n) \in L^\Psi(p \cdot \mu) \times \dots \times L^\Psi(p \cdot \mu)$ es

$$D^n M_p(u)(v_1, \dots, v_n) = E_p(v_1 \dots v_n e^u)$$

En particular $DM_p(0) = E_p$.

- Demostración.* 1. Claramente, por la definición de M_p , se tiene que $M_p(0) = 1$.
2. Ver Pistone y Sempi [21].
3. Si $u \in \text{dom}^\circ(M_p)$, para cada $v \in L^\Psi(p \cdot \mu)$, por el numeral 2 se tiene $u + tv \in \text{dom}^\circ(M_p)$ para t suficientemente pequeño y

$$M_p(u + tv) = \int e^{tv} e^u p d\mu = M_p(u) E_z[e^{tv}],$$

donde $z = \frac{e^u}{M_p(u)} \cdot E_z[e^{tv}]$ es la transformada de Laplace de v respecto a la densidad de probabilidad z , es analítica en el interior de su dominio propio y por Teorema 3.3.3.

$$E_z[e^{tv}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_z[v^k]}{k!} t^k.$$

Así

$$\frac{d^n}{dt^n} M_p(u + tv) = M_p(u) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{E_z[v^k]}{(k-n)!} t^{k-n}$$

y

$$\frac{d^n}{dt^n} M_p(u + tv)|_{t=0} = M_p(u) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{E_z[v^k] v^n}{v^n (k-n)!} t^{k-n} = M_p(u) E_z[v^n] = E_p[v^n e^u].$$

4. Para cada $u \in B_\Psi$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene $E_p[\hat{\lambda}_{1,n}(u)] \in \mathcal{P}^n(L^\Psi(p \cdot \mu); \mathbb{R})$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} E_p[\hat{\lambda}_{1,n}(u)]$ es una serie de potencias con radio de convergencia positivo. En una vecindad de cada $u_0 \in B_\Psi$, por Teorema 3.3.3.

$$M_p(u) = E_p[\exp_{p,1}(u)] = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_{1,n}(u_0) (u - u_0)^n p d\mu.$$

Integrando término a término el miembro derecho de esta expresión se obtiene:

$$\begin{aligned} M_p(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} E_p[\hat{\lambda}_{1,n}(u_0) (u - u_0)^n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} E_p[(u - u_0)^n e^{u_0}]. \end{aligned}$$

Por lo tanto M_p es una función analítica. Su n -ésima derivada en u en las direcciones $(v_1, \dots, v_n) \in L^\Psi(p \cdot \mu) \times \dots \times L^\Psi(p \cdot \mu)$ es

$$D^n M_p(u)(v_1, \dots, v_n) = E_p[\lambda_{1,n}(u)(v_1, \dots, v_n)] = E_p[v_1 \cdots v_n e^u].$$

□

Definición 3.3.7. *Considérese B_Ψ la bola unidad abierta de $L^\Psi(p \cdot \mu)$. El funcional acumulante*

$$K_p : B_\Psi \rightarrow [0, +\infty]$$

se define como

$$K_p(u) = \ln(M_p(u)) \quad (3.15)$$

El funcional acumulante tiene dominio propio $\text{dom}(M_p) \cap \mathcal{B}_p$. Algunas propiedades de este funcional se encuentran en Pistone y Sempi [21] proposición (2.5(a)) y en Pistone y Rogantin [12]. Sin embargo sólo mostraremos las propiedades necesarias para el presente trabajo.

Proposición 3.3.3. *Para el funcional K_p es claro que $\mathcal{W}_p \subset \text{dom}(K_p)$. Además se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $K_p(0) = 0$; en otro caso, es estrictamente positivo, convexo e infinitamente Fréchet diferenciable en \mathcal{W}_p .
2. $\forall u \in \mathcal{W}_p$, $z = e^{u-K_p(u)}p$, es una densidad de probabilidad en \mathfrak{M}_μ . El valor de la n -ésima derivada en u en la dirección de $v \in \mathcal{B}_p$ de K_p , es decir la forma continua n -lineal, $D^n K_p(u)$ es el n -ésimo acumulante de v bajo la densidad de probabilidad z

$$D^n K_p(u)v^n = \frac{d^n}{dt^n} \ln E_z[e^{tv}]|_{t=0}.$$

3. Para $v \in \mathcal{B}_p$ se tiene

$$DK_p(u)v = E_z[v].$$

Demostración. 1. Ver Pistone y Sempi [21].

2. Por definición se tiene que

$$K_p(u) = \ln(M_p(u)),$$

por lo tanto

$$D^n K_p(u)v^n = (D^n \ln [M_p(u)]) v^n.$$

Como $z = e^{u-K_p(u)}p$, por Teorema 3.3.4. se sigue

$$D^n K_p(u) = \frac{d^n}{dt^n} \ln E_z[e^{tv}]|_{t=0}.$$

3. Es consecuencia directa del numeral anterior.

□

Corolario 3.3.1. *Para cada densidad $p \in \mathfrak{M}_\mu$, el funcional acumulante $K_p : B_p \cap B_\Psi \rightarrow [0, \infty)$ es una función analítica.*

Demostración. Este funcional es una composición de funciones analíticas.

□

3.4. Estructura de variedad q -exponencial

Ahora se construirá la variedad de información q -exponencial, la cual generaliza (en el caso límite $q \rightarrow 1$) a la variedad de información exponencial construida por Pistone y Sempì, y es un modelo geométrico similar al modelo geométrico k -exponencial de Pistone [22].

En \mathfrak{M}_μ se considerará la topología de la e -convergencia introducida por Pistone y Sempì [21] que se expuso en la definición 2.4.2 de los preliminares.

Algunos comentarios y resultados de [21] son necesarios para el desarrollo de este trabajo, los cuales se presentan a continuación citando la página para no repetir los argumentos de Pistone y Sempì.

Como comentario a la definición de la e -convergencia, Pistone y Sempì establecen en [21] (página 1545):

Observación 2. la e -convergencia, de $\{g_n\}$ a g en \mathcal{M}_μ , es equivalente a la convergencia de

$$\frac{g_n}{g} \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad \frac{g}{g_n} \rightarrow 1,$$

con respecto a todas las seminormas $f \rightarrow E_g[|f|^h]$, para todo $h > 1$.

Este hecho conduce a otro, que aparece en [21] (página 1549), y que se expone en la siguiente observación.

Observación 3. Sean ϕ una función de Young y $p \in \mathfrak{M}_\mu$. Si $u, v \in L^\phi(p \cdot \mu)$ y $\{u_n\}$ es una sucesión en $L^\phi(p \cdot \mu)$, se tiene que

1. para todo $\epsilon > 0$, $\|u - v\|_{\phi, p} < \epsilon$, si y sólo si, existe $h > \frac{1}{\epsilon}$ tal que $E_p[\phi(h(u - v))] \leq 1$.
2. $u_n \rightarrow u$ en $L^\phi(p \cdot \mu)$, si y sólo si, para todo $h > 1$, se cumple

$$\limsup E_p[\phi(h(u_n - u))] \leq 1.$$

Para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, se considera el conjunto

$$\mathcal{V}_p := \text{int} \left(\left\{ u \in \mathcal{B}_p : \|u\|_{\Phi_1, p} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{-1}{1-q} < u \quad \text{c.s respecto a } p \cdot \mu \right\} \right),$$

donde int denota el interior en $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$. Para este subconjunto del dominio propio del funcional K_p , se define el mapeo

$$\begin{aligned} e_{q,p} : \mathcal{V}_p &\rightarrow \mathfrak{M}_\mu \\ u &\rightarrow e_q^{(u \ominus_q K_p(u))} p = e_q^{\left[\frac{u - K_p(u)}{1 + (1-q)K_p(u)} \right]} p, \end{aligned} \tag{3.16}$$

el cual está bien definido porque $\frac{-1}{1-q} < u \ominus_q K_p(u)$ equivale a $\frac{-1}{1-q} < u$, con lo cual $u \ominus_q K_p(u)$ está en el dominio de $e_q(\cdot)$.

Lema 3.4.1. *Para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, el mapeo $e_{q,p}$ es inyectivo.*

Demostración. Sean $p \in \mathfrak{M}_\mu$ y $u_1, u_2 \in \mathcal{V}_p$ tales que $e_{q,p}(u_1) = e_{q,p}(u_2)$; es decir,

$$\frac{u_1 - K_p(u_1)}{1 + (1 - q)K_p(u_1)} = \frac{u_2 - K_p(u_2)}{1 + (1 - q)K_p(u_2)}. \quad (3.17)$$

Aplicando la transformación lineal $E_p[\cdot]$ en ambos lados de la ecuación anterior, teniendo en cuenta que ambos denominadores, $K_p(u_1)$ y $K_p(u_2)$ son constantes, se obtiene

$$\frac{E_p[u_1] - K_p(u_1)}{1 + (1 - q)K_p(u_1)} = \frac{E_p[u_2] - K_p(u_2)}{1 + (1 - q)K_p(u_2)}.$$

Como $u_1, u_2 \in \mathcal{V}_p \subset B_p$ se tiene que $E_p[u_1] = E_p[u_2] = 0$, de donde

$$\frac{-K_p(u_1)}{1 + (1 - q)K_p(u_1)} = \frac{-K_p(u_2)}{1 + (1 - q)K_p(u_2)},$$

es decir,

$$-K_p(u_1) - (1 - q)K_p(u_1)K_p(u_2) = -K_p(u_2) - (1 - q)K_p(u_1)K_p(u_2)$$

y así $K_p(u_1) = K_p(u_2)$; de lo cual, reemplazando en la ecuación 3.17 permite concluir que

$$u_1 = u_2.$$

□

En adelante, el rango de $e_{q,p}$ se denotará por \mathcal{U}'_p , es decir,

$$\mathcal{U}'_p := e_{q,p}(\mathcal{V}_p).$$

El siguiente lema garantiza que los mapeos que se tomarán para introducir las cartas en la construcción de la variedad q -exponencial, son precisamente biyecciones. Dichos mapeos se definen, para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, por

$$\begin{aligned} s_{q,p} : \mathcal{U}'_p &\rightarrow \mathcal{V}_p \\ z &\rightarrow \frac{\ln_q(\frac{z}{p}) - E_p[\ln_q(\frac{z}{p})]}{1 + (1 - q)E_p[\ln_q(\frac{z}{p})]}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Lema 3.4.2. *Para $p \in \mathfrak{M}_\mu$, el mapeo $s_{q,p}$ es precisamente la función inversa de $e_{q,p}$ (y por tanto $s_{q,p}$ es una biyección).*

Demostración. Sean $p, q \in \mathcal{M}_\mu$. Basta probar que para todo $u \in \mathcal{V}_p$ se tiene $s_{q,p}[e_{q,p}(u)] = u$ y para todo $z \in \mathcal{U}'_p$ se tiene $e_{q,p}[s_{q,p}(z)] = z$. Sólo se probará la primera igualdad, ya que la segunda es análoga.

Realizando cálculos directos sobre las expresiones en 3.16 y 3.18 se tiene:

$$\begin{aligned}
 s_{q,p}[e_{q,p}(u)] &= s_{q,p} \left[e_q^{\left[\frac{u-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} \right]} p \right] \\
 &= \frac{\ln_q \left(e_q^{\left[\frac{u-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} \right]} \right) - E_p \left[\ln_q \left(e_q^{\left[\frac{u-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} \right]} \right) \right]}{1 + (1-q)E_p \left[\ln_q \left(e_q^{\left[\frac{u-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} \right]} \right) \right]} \\
 &= \frac{\frac{u-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} - E_p \left[\frac{u-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} \right]}{1 + (1-q)E_p \left[\frac{u-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} \right]},
 \end{aligned}$$

es decir,

$$s_{q,p}[e_{q,p}(u)] = \frac{u - K_p(u) - E_p[u - K_p(u)]}{1 + (1-q)K_p(u) + (1-q)E_p[u - K_p(u)]}.$$

Finalmente, como $K_p(u)$ es constante y $E_p[u] = 0$, se sigue que

$$s_{q,p}[e_{q,p}(u)] = u.$$

□

Se probará ahora que los \mathcal{U}'_p son abiertos según la topología dada por la e -convergencia y que las funciones $s_{q,p}$ son secuencialmente continuas de la e -convergencia a la $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$ -convergencia.

Proposición 3.4.1. *Sea $\{g_n\}$ una sucesión e -convergente a g , y supongamos que $g \in \mathcal{U}'_p$. La sucesión $\{g_n\}$ está eventualmente en \mathcal{U}'_p y la sucesión de funciones $u_n = s_{q,p}(g_n)$ converge a $u = s_{q,p}(g)$ en \mathcal{V}_p .*

Demostración. Se debe probar que existe una sucesión $u_n \in \mathcal{V}_p$ tal que $g_n = e_{q,p}(u_n)$ está eventualmente en \mathcal{U}'_p y $u_n \rightarrow u$ en \mathcal{V}_p .

Considere la sucesión w_n definida por

$$g_n = e_q^{(w_n \ominus_q K_p(u))} p.$$

Como $\{g_n\}$ es e -convergente a g , de la definición de e -convergencia, se tiene que la sucesión $\{w_n\}$ converge a u en μ -medida. Además, por la definición de e -convergencia (precisamente por la observación 2) se sigue que

$$E_p \left[\left| \frac{g_n}{g} \right|^h \right] \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad E_p \left[\left| \frac{g}{g_n} \right|^h \right] \rightarrow 1, \quad \text{para todo } h > 1.$$

En consecuencia

$$\frac{1}{2}E_p \left[\left| \frac{g_n}{g} \right|^h + \left| \frac{g}{g_n} \right|^h \right] - 1 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Ahora, teniendo en cuenta la propiedad 2.23, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_p \left[\left| \frac{g_n}{g} \right|^h + \left| \frac{g}{g_n} \right|^h \right] - 1 &= \frac{1}{2}E_p \left[\left| \frac{e_q^{w_n \ominus_q K_p(u)} p}{e_q^{u \ominus_q K_p(u)} p} \right|^h + \left| \frac{e_q^{u \ominus_q K_p(u)} p}{e_q^{w_n \ominus_q K_p(u)} p} \right|^h \right] - 1 \\ &= \frac{1}{2}E_p \left[\left| \frac{e_q^{w_n}}{e_q^u} \right|^h \right] + E_p \left[\left| \frac{e_q^u}{e_q^{w_n}} \right|^h \right] - 1 \\ &= \frac{1}{2}E_p \left[\left| \frac{e_q^{w_n}}{e_q^u} \right|^h + \left| \frac{1}{\frac{e_q^{w_n}}{e_q^u}} \right|^h \right] - 1 \\ &= \frac{1}{2}E_p \left[\left| e_q^{w_n \ominus_q u} \right|^h + \left| \frac{1}{e_q^{w_n \ominus_q u}} \right|^h \right] - 1 \\ &= E_p \left[\frac{1}{2} \left(e_{1-\frac{(1-q)}{h}}^{h(w_n \ominus_q u)} + \frac{1}{e_{1-\frac{(1-q)}{h}}^{h(w_n \ominus_q u)}} \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Nótese que para reales $0 < r_1 < r_2 < 1$, se cumple que $e_{r_1}^{(\cdot)} \leq e_{r_2}^{(\cdot)}$. Ahora, como $h > 1$, se puede considerar $r_1 = q$ y $r_2 = 1 - \frac{1-q}{h}$, de lo cual se sigue

$$e_q^{(\cdot)} \leq e_{1-\frac{1-q}{h}}^{(\cdot)}. \quad (3.20)$$

Además, como $0 < 1 - \frac{(1-q)}{h} < 1$, resulta que

$$e_{1-\frac{(1-q)}{h}}^{(\cdot)} \leq e^{(\cdot)}. \quad (3.21)$$

De lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} E_p \left[\frac{1}{2} \left(e_{1-\frac{(1-q)}{h}}^{h(w_n \ominus_q u)} + \frac{1}{e_{1-\frac{(1-q)}{h}}^{h(w_n \ominus_q u)}} \right) - 1 \right] &\geq E_p \left[\frac{1}{2} \left(e_q^{h(w_n \ominus_q u)} + \frac{1}{e^{h(w_n \ominus_q u)}} \right) - 1 \right] \\ &\geq E_p[\Phi_1(h(w_n \ominus_q u))] \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{2} \left[E_p \left[\left| \frac{g_n}{g} \right|^h + \left| \frac{g}{g_n} \right|^h \right] - 1 \right] \geq E_p[\Phi_1(h(w_n \ominus_q u))],$$

y por 3.19 se sigue que para todo $h > 1$,

$$E_p[\Phi_1(h(w_n \ominus_q u))] \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Así, por la observación 3, se sigue que $w_n \ominus_q u \rightarrow 0$ en $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$. Como

$$w_n \ominus_q u = \frac{w_n - u}{1 + (1 - q)u} \rightarrow 0 \quad ,$$

resulta que $(w_n - u) \rightarrow 0$ en $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$.

De lo anterior resulta que la sucesión $u_n = w_n \ominus_q E_p[w_n]$ está eventualmente bien definida en $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$ y pertenece eventualmente a \mathcal{V}_p , por lo cual se debe tener $g_n = e_q^{(u_n \ominus_q K_p(u_n))} p$.

□

La proposición anterior establece que los mapeos $s_{q,p}$ inducen una topología τ_e en \mathcal{M}_μ , la cual es equivalente a la topología de la e -convergencia.

Ahora, como para cada $p \in \mathcal{M}_\mu$, el respectivo \mathcal{U}'_p es abierto en τ_e , entonces cada par $(\mathcal{U}'_p, s_{q,p})$ es una carta, teniendo así una variedad topológica para la cual no se ha definido una estructura diferencial. Si $\mathcal{U}'_{p_1} \cap \mathcal{U}'_{p_2} \neq \emptyset$ para cada par de densidades $p_1, p_2 \in \mathfrak{M}_\mu$, el mapeo de transición es la función:

$$s_{q,p_2} \circ e_{q,p_1} : s_{q,p_1} \left(\mathcal{U}'_{p_1} \cap \mathcal{U}'_{p_2} \right) \rightarrow s_{q,p_2} \left(\mathcal{U}'_{p_1} \cap \mathcal{U}'_{p_2} \right),$$

definida para cada $u \in s_{q,p_1} \left(\mathcal{U}'_{p_1} \cap \mathcal{U}'_{p_2} \right)$ por

$$\begin{aligned} z &= s_{q,p_2} \left((e_{q,p_1}(u)) \right) \\ &= s_{q,p_2} \left(e_q^{[u \ominus_q K_p(u)]} p_1 \right) \\ &= \frac{\ln_q \left(\frac{e_q^{[u \ominus_q K_p(u)]} p_1}{p_2} \right) - E_{p_2} \left[\ln_q \left(\frac{e_q^{[u \ominus_q K_p(u)]} p_1}{p_2} \right) \right]}{1 + (1 - q) E_{p_2} \left[\ln_q \left(\frac{e_q^{[u \ominus_q K_p(u)]} p_1}{p_2} \right) \right]}, \end{aligned}$$

por propiedades de q -álgebra y funciones q -deformadas, al simplificar la expresión anterior se tiene

$$z = \frac{u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) - E_{p_2} \left[u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right]}{1 + \left\{ [1 + (1 - q)K_{p_2}(u)](1 - q) E_{p_2} \left[u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right] \right\}}. \quad (3.22)$$

Lema 3.4.3. Para cada par de densidades $p_1, p_2 \in \mathfrak{M}_\mu$, la función $s_{q,p_2} \circ e_{q,p_1}$, es un homeomorfismo.

Demostración. Claramente esta función es una composición de funciones continuas y por tanto es continua. Su función inversa viene dada por

$$\begin{aligned} (s_{q,p_2} \circ e_{q,p_1})^{-1} &= e_{q,p_1}^{-1} \circ s_{q,p_2}^{-1} \\ &= s_{q,p_1} \circ e_{q,p_2}, \end{aligned}$$

y por el mismo argumento anterior se tiene que ésta función es continua. Por tanto la función $s_{q,p_2} \circ e_{q,p_1}$, es un homeomorfismo. \square

Antes de definir la variedad q -exponencial, y para tener condiciones necesarias en la diferenciabilidad, se resalta la siguiente notación.

- (1) La variedad de información de Pistone y Sempi se construye mediante la función de Young $\Psi(\cdot) = \cosh(\cdot) - 1$. Para cada $p \in \mathcal{M}_\mu$

$$\mathcal{W}_p = \left\{ u \in L^\Psi(p \cdot \mu) : \|u\|_{\Psi,p} \leq 1, \text{ y } E_p[u] = 0 \right\}$$

y se cuenta con los siguientes mapeos inyectivos, continuos e inversos entre si:

$$\begin{aligned} e_p : \mathcal{W}_p &\rightarrow \mathcal{U}_p := e_p(\mathcal{W}_p) \subset \mathcal{M}_\mu \\ s_p : \mathcal{U}_p &\rightarrow \mathcal{W}_p \subset L^\Psi(p \cdot \mu). \end{aligned}$$

En tal caso, las cartas son pares (\mathcal{U}_p, s_p) , con $p \in \mathcal{M}_\mu$.

- (2) En la presente sección, se consideró la función de Young Φ_1 definida en 3.2. En el conjunto

$$\mathcal{V}_p := \text{int} \left(\left\{ u \in \mathcal{B}_p : \|u\|_{\Phi_1,p} < 1 \text{ y } \frac{-1}{1-q} < u \text{ c.s respecto a } p \cdot \mu \right\} \right), \quad p \in \mathcal{M}_\mu,$$

se definieron los siguientes mapeos inyectivos, continuos e inversos entre si:

$$\begin{aligned} e_{q,p} : \mathcal{V}_p &\rightarrow \mathcal{U}'_p := e_{q,p}(\mathcal{V}_p) \subset \mathcal{M}_\mu \\ s_{q,p} : \mathcal{U}'_p &\rightarrow \mathcal{V}_p \subset L^{\Phi_1}(p \cdot \mu). \end{aligned}$$

La siguiente definición plantea los conjuntos abiertos $\mathcal{U}_{q,p}$ y las biyecciones $\sigma_{q,p}$ que se usarán para formar las cartas de la variedad q -exponencial.

Definición 3.4.1.

Para cada $p \in \mathcal{M}_\mu$ se definen

$$\mathcal{V}_{q,p} := \mathcal{W}_p \cap \mathcal{V}_p, \quad \mathcal{U}_{q,p} := \mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}'_p$$

$$\varepsilon_{q,p} := e_{q,p} / \mathcal{V}_{q,p} : \quad \mathcal{V}_{q,p} \longrightarrow \mathcal{U}_{q,p} \subset \mathcal{M}_\mu,$$

$$\sigma_{q,p} := s_{q,p} / \mathcal{U}_{q,p} : \quad \mathcal{U}_{q,p} \longrightarrow \mathcal{V}_{q,p} \subset L^\Psi(p \cdot \mu).$$

Las funciones $\sigma_{q,p}$, $s_{q,p}$ y s_p no son iguales punto a punto en $\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}'_p$, no obstante se cumple la siguiente igualdad entre conjuntos,

$$\sigma_{q,p}(\mathcal{U}_{q,p}) = s_{q,p}(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}'_p) = s_p(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}'_p).$$

El siguiente teorema establece la estructura de la variedad q -exponencial.

Teorema 3.4.1. *La colección de pares $\{(\mathcal{U}_{q,p}, \sigma_{q,p})\}_{p \in \mathfrak{M}_\mu}$ es un atlas de clase C^∞ modelado en \mathfrak{M}_μ .*

Demostración. Considérese la familia de pares $(\mathcal{U}_{q,p}, \sigma_{q,p})_{p \in \mathfrak{M}_\mu}$. Claramente los \mathcal{U}_p cubren a \mathcal{M}_μ , cada $\mathcal{U}_{q,p}$ es un abierto en \mathcal{M}_μ (porque \mathcal{U}_p y \mathcal{U}'_p lo son) y $\sigma_{p,q}$ es una biyección; esto hace que cada $(\mathcal{U}_{q,p}, \sigma_{q,p})$ sea una carta y el correspondiente mapeo de transición para $p_1, p_2 \in \mathfrak{M}_\mu$, con $\mathcal{U}_{q,p_1} \cap \mathcal{U}_{q,p_2} \neq \emptyset$, esté dado por

$$\sigma_{q,p_2} \circ \varepsilon_{q,p_1} : \sigma_{q,p_1}(\mathcal{U}_{q,p_1} \cap \mathcal{U}_{q,p_2}) \rightarrow \sigma_{q,p_2}(\mathcal{U}_{q,p_1} \cap \mathcal{U}_{q,p_2}),$$

definido de la misma manera que en 3.22.

Se debe probar que:

1. $\forall p, z \in \mathfrak{M}_\mu$, $\sigma_{q,p}(\mathcal{U}_{q,p} \cap \mathcal{U}_{q,z})$ es un abierto en $L^\Psi(p \cdot \mu)$.
2. $\forall p_1, p_2 \in \mathfrak{M}_\mu$, el mapeo de transición $\sigma_{q,p_2} \circ \varepsilon_{q,p_1}$ es un isomorfismo de clase \mathcal{C}^∞ .

(1) Nótese que el conjunto $\sigma_{q,p}(\mathcal{U}_{q,p} \cap \mathcal{U}_{q,z})$ coincide con la restricción de $\sigma_{q,p}$ a $\mathcal{U}_{q,z}$, es decir,

$$\sigma_{q,p}(\mathcal{U}_{q,p} \cap \mathcal{U}_{q,z}) = \sigma_{q,p}(\mathcal{U}_{q,z}) = s_{q,p}(\mathcal{U}_z \cap \mathcal{U}'_z) = s_p(\mathcal{U}_z \cap \mathcal{U}'_z).$$

Del trabajo de Pistone y Sempì [21], se sabe que el mapeo s_p^{-1} es secuencialmente continuo y definido de \mathcal{U}_p en $\mathcal{W}_p \subset L^\Psi(p \cdot \mu)$. De lo anterior y teniendo en cuenta que $\mathcal{U}_z \cap \mathcal{U}'_z$ es subconjunto de \mathcal{U}_z y además es abierto con la topología de la e -convergencia, se sigue que $s_p(\mathcal{U}_z \cap \mathcal{U}'_z)$ es abierto en $L^\Psi(p \cdot \mu)$.

(2) Por el lema 3.4.3, $s_{q,p_2} \circ e_{q,p_1}$ es un homeomorfismo entre $s_{q,p_1}(\mathcal{U}'_{p_1} \cap \mathcal{U}'_{p_2})$ y $s_{q,p_2}(\mathcal{U}'_{p_1} \cap \mathcal{U}'_{p_2})$. Además, \mathcal{U}_{q,p_1} y \mathcal{U}_{q,p_2} son subconjuntos de $\mathcal{U}'_{p_1} \cap \mathcal{U}'_{p_2}$ y $(\mathcal{U}'_{p_1} \cap \mathcal{U}'_{p_2})$ respectivamente (todos abiertos respecto a la topología de la e -convergencia). De lo anterior resulta que $\sigma_{q,p_2} \circ \varepsilon_{q,p_1}$ es una restricción continua de $s_{q,p_2} \circ e_{q,p_1}$ y por tanto es un homeomorfismo de $\sigma_{q,p_1}(\mathcal{U}_{q,p_1} \cap \mathcal{U}_{q,p_2})$ en $\sigma_{q,p_2}(\mathcal{U}_{q,p_1} \cap \mathcal{U}_{q,p_2})$.

Los mapeos de transición pueden ser expresados por

$$u \rightarrow \frac{u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) - E_{p_2} \left[u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right]}{1 + \left\{ [1 + (1 - q)K_{p_2}(u)](1 - q)E_{p_2} \left[u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right] \right\}} \quad (3.23)$$

o bien por $s_{q,p_2} \circ e_{q,p_1}(u) = \frac{1}{g(u)}f(u)$, donde

$$f(u) = u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) - E_{p_2} \left[u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right],$$

$$g(u) = 1 + \left\{ [1 + (1 - q)K_{p_2}(u)](1 - q)E_{p_2} \left[u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right] \right\}.$$

Para probar que $s_{q,p_2} \circ e_{q,p_1}$ es de clase C^∞ , basta probar que f y g lo sean, ya que $g(u) \neq 0$ porque los mapeos de transición están bien definidos.

Se sabe que existe $z \in (\mathcal{U}_{q,p_1} \cap \mathcal{U}_{q,p_2})$ tal que $p_2 = \varepsilon_{q,z}(u)$; de este modo $u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \in B_z$. Denotando $v = u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$ y aplicando el numeral (3) de la proposición 3.3.3, se tiene que $DK_z(u)v = E_{p_2}[v]$. Ahora, dado que K_z es de clase C^∞ en \mathcal{W}_z , entonces $E_{p_2}[u + [1 + (1 - q)u] \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right)]$ es de clase C^∞ . Como toda función afín es de clase C^∞ y f se puede expresar como la suma de una función afín y una de clase C^∞ , se tiene que f es de clase C^∞ . Análogamente, dado que K_{p_2} es de clase C^∞ en \mathcal{W}_{p_2} , se cumple que g es de clase C^∞ .

□

En conclusión se tiene una variedad de Banach (variedad de información q -exponencial), que induce una topología τ_e sobre \mathcal{M}_μ equivalente a la topología de la e -convergencia. Dicha variedad es una q -deformación de la variedad de información de Pistone y Sempi.

Capítulo 4

Haz tangente y entropía Relativa

En el contexto de las variedades estadísticas exponenciales es sabido que existe una conexión natural entre el espacio tangente y los modelos paramétricos exponenciales unidimensionales alrededor de p ; de hecho cada curva diferenciable en \mathfrak{M}_μ , $p(t)$ con $t \in I \subset \mathbb{R}$, tal que $p(t_0) = p$, tiene un modelo tangente de la forma $e^{tu - K_p(tu)}p$. En este sentido, se mostrará cómo la variedad de información q -exponencial también satisface este requerimiento en el contexto de modelos paramétricos q -exponenciales y así queda probado que el espacio tangente está identificado con las familias de modelos exponenciales. Adicionalmente a esto se muestra la relación entre los elementos del haz tangente a la variedad y la función score q -deformada.

Para contextualizar un poco, la función *score* es de gran importancia en inferencia estadística y estadística computacional. Dicha función se define de la siguiente manera. Considere una familia parametrizada de funciones de densidad de probabilidad

$$x \rightarrow f(x|\theta)$$

donde θ es el vector de parámetros. Si se consideran los observables x fijos entonces la función de verosimilitud (likelihood) es

$$\theta \rightarrow f(x|\theta)$$

usualmente denotada por

$$L(\theta|x) = f(x|\theta).$$

La función score está definida como el gradiente del logaritmo (usualmente natural) de la función de verosimilitud

$$V = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta|x).$$

En este capítulo se identificará la q -deformación de la función score al considerar el logaritmo q -deformado según Tsallis en la función score, para la cual la función de verosimilitud está dada de la siguiente manera: sean $p \in \mathfrak{M}_\mu$ y considere un modelo paramétrico unidimensional $g(t)$ tal que $g(t_0) = p$ (se verá que estos modelos corresponden a curvas regulares de la variedad); entonces la aplicación $f(t, p) = \frac{g(t)}{p}$ con p fijo es una función de

verosimilitud, pues si t es fijo entonces f es una densidad de probabilidad. Con f definida de esta manera se tiene que la función score q -deformada será

$$\frac{d}{dt} \ln_q \left(\frac{g(t)}{p} \right).$$

Uno de los conceptos más importantes en física estadística es el de *entropía relativa*, también llamada *divergencia* [14]. Una generalización de este concepto es el de *f-divergencias*, el cual se encuentra ampliamente desarrollado en [17] para el caso discreto. Uno de estos tipos de *f-divergencias*, conocidas como divergencias del tipo Bregman,

$$D(p||q) = \sum_k [f(p_k) - f(q_k) - (p_k - q_k)f'(q_k)],$$

las cuales en física estadística miden la diferencia en energía libre entre una densidad p y la densidad del equilibrio q . Naudts [17] muestra cómo esta divergencia expresa que la energía libre como una función de la densidad p es mínima en el equilibrio $p = q$. En la sección 4.2 se trabajará un tipo de divergencia, q -divergencia, para la cual se muestra su estrecha relación con la variedad de información q -estadística (contenido de información), y con la entropía relativa de Tsallis de gran importancia en termoestadística generalizada.

4.1. El Haz tangente

Antes de definir la estructura de variedad tangente, veamos primero una característica del mapeo de transición $\sigma_{q,p_2} \circ \varepsilon_{q,p_1}$.

Sean $u \in \mathcal{V}_{q,p_1}$, $\bar{u} \in \mathcal{V}_{q,p_2}$ y $z \in (\mathcal{U}_{q,p_1} \cap \mathcal{U}_{q,p_2})$, con $\sigma_{q,p_2} \circ \varepsilon_{q,p_1}(z) = \bar{u}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\ln_q \left(\frac{z}{p_2} \right) - E_{p_2} \left[\ln_q \left(\frac{z}{p_2} \right) \right]}{1 + (1-q)E_{p_2} \left[\ln_q \left(\frac{z}{p_2} \right) \right]} \\ &= \frac{\ln_q \left(e_q^{\left[\frac{u - K_{p_1}(u)}{1+(1-q)K_{p_1}(u)} \right]} \frac{p_1}{p_2} \right) - E_{p_2} \left[\ln_q \left(e_q^{\left[\frac{u - K_{p_1}(u)}{1+(1-q)K_{p_1}(u)} \right]} \frac{p_1}{p_2} \right) \right]}{1 + (1-q)E_{p_2} \left[\ln_q \left(e_q^{\left[\frac{u - K_{p_1}(u)}{1+(1-q)K_{p_1}(u)} \right]} \frac{p_1}{p_2} \right) \right]} \\ &= \frac{\left(\frac{u - K_{p_1}(u)}{1+(1-q)K_{p_1}(u)} \right) \oplus_q \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) - E_{p_2} \left[\left(\frac{u - K_{p_1}(u)}{1+(1-q)K_{p_1}(u)} \right) \oplus_q \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right]}{1 + (1-q)E_{p_2} \left[\left(\frac{u - K_{p_1}(u)}{1+(1-q)K_{p_1}(u)} \right) \oplus_q \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right]} \\ &= \left[\left(\frac{u - K_{p_1}(u)}{1+(1-q)K_{p_1}(u)} \right) \oplus_q \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right] \ominus_q E_{p_2} \left[\left(\frac{u - K_{p_1}(u)}{1+(1-q)K_{p_1}(u)} \right) \oplus_q \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\bar{u} = f(u) \ominus_q E_{p_2}[f(u)] \quad (4.1)$$

donde

$$f(u) = \left[\left(\frac{u - K_{p_1}(u)}{1 + (1 - q)K_{p_1}(u)} \right) \oplus_q \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right]. \quad (4.2)$$

La anterior expresión muestra las funciones de transición en términos de la q -álgebra definida en la sección 2.35, y esta forma de representar dichos mapeos es útil a la hora de realizar los cálculos necesarios para probar la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. *Considere $u \in \sigma_{q,p_1}(\mathcal{U}_{q,p_1} \cap \mathcal{U}_{q,p_2})$; la derivada del mapeo $\sigma_{q,p_2} \circ \sigma_{q,p_1}^{-1}$ evaluada en u en la dirección de $v \in L^\Psi(p_2 \cdot \mu)$ es de la forma*

$$A(u) - B(u)E_{p_2}[A(u)],$$

donde $A(u)$ y $B(u)$ son constantes que dependen de u .

Demostración. De 2.35 se sigue

$$\bar{u} = \sigma_{q,p_2} \circ \sigma_{q,p_1}^{-1}(u) = \frac{f(u) - E_{p_2}[f(u)]}{1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]}.$$

Por lo tanto

$$D(\sigma_{q,p_2} \circ \sigma_{q,p_1}^{-1})(u) \cdot v = \frac{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]] \frac{\partial f(u)}{\partial u} - [1 + (1 - q)f(u)] \frac{\partial E_{p_2}[f(u)]}{\partial u}}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]^2},$$

lo cual se puede escribir como

$$D(\sigma_{q,p_2} \circ \sigma_{q,p_1}^{-1})(u) \cdot v = \frac{\frac{\partial f(u)}{\partial u}}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]} - \left[\frac{[1 + (1 - q)f(u)]}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]^2} \right] \frac{\partial E_{p_2}[f(u)]}{\partial u}. \quad (4.3)$$

Nótese que

$$\begin{aligned} E_{p_2}[f(u)] &= E_{p_2} \left[\left(\frac{u - K_{p_1}(u)}{1 + (1 - q)K_{p_1}(u)} \right) \oplus_q \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right] \\ &= E_{p_2} \left[\left(\frac{u - K_{p_1}(u)}{1 + (1 - q)K_{p_1}(u)} \right) + \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) + (1 - q) \left(\frac{u - K_{p_1}(u)}{1 + (1 - q)K_{p_1}(u)} \right) \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right] \\ &= E_{p_2} \left[\ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right] + \left[1 + (1 - q) \ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right] E_{p_2} \left[\frac{u - K_{p_1}(u)}{[1 + (1 - q)K_{p_1}(u)]} \right], \end{aligned}$$

y al diferenciar parcialmente respecto a u y por la regla de la derivada del cociente se obtiene

$$\frac{\partial E_{p_2}[f(u)]}{\partial u} = E_{p_2} \left[\frac{[1 + (1 - q)K_{p_1}(u) - [1 + (1 - q)u]DK_{p_1}(u) \cdot v][1 + (1 - q)\ln_q \left(\frac{p_1}{p_2} \right)]}{[1 + (1 - q)K_{p_1}(u)]^2} \right];$$

es claro que el argumento en E_{p_2} de esta última expresión, es precisamente

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = \left[\frac{[1 + (1 - q)K_{p_1}(u) - DK_{p_1}(u)v[1 + (1 - q)u]] \left[1 + (1 - q)\ln_q\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right]}{[1 + (1 - q)K_{p_1}(u)]^2} \right],$$

la cual se obtiene al aplicar la regla de la derivada del cociente en 4.2; y por lo tanto en 4.3 se tiene

$$D(\sigma_{q,p_2} \circ \sigma_{q,p_1}^{-1})(u) \cdot v = \frac{\frac{\partial f(u)}{\partial u}}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]} - \frac{[1 + (1 - q)f(u)]}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]^2} E_{p_2} \left[\frac{\partial f(u)}{\partial u} \right],$$

puesto que $E_{p_2}[f(u)]$ es constante podemos escribir esta expresión como

$$D(\sigma_{q,p_2} \circ \sigma_{q,p_1}^{-1})(u) \cdot v = \frac{\frac{\partial f(u)}{\partial u}}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]} - \frac{[1 + (1 - q)f(u)]}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]} E_{p_2} \left[\frac{\frac{\partial f(u)}{\partial u}}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]} \right];$$

si tomamos

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{\frac{\partial f(u)}{\partial u}}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]} \\ B(u) &= \frac{[1 + (1 - q)f(u)]}{[1 + (1 - q)E_{p_2}[f(u)]]} \end{aligned}$$

entonces dicha derivada se puede escribir de la forma

$$D(\sigma_{q,p_2} \circ \sigma_{q,p_1}^{-1})(u) \cdot v = A(u) - B(u)E_{p_2}[A(u)] \quad (4.4)$$

que es lo que se quería demostrar. \square

Por ser la derivada del mapeo de transición $\sigma_{q,p_2} \circ \sigma_{q,p_1}^{-1}$, el mapeo $A(u) - B(u)E_{p_2}[A(u)]$ es un isomorfismo lineal topológico de clase C^∞ entre los espacios $L^\Psi(p_1 \cdot \mu)$ y $L^\Psi(p_2 \cdot \mu)$, por lo cual el atlas de \mathfrak{M}_μ es un atlas modelado sobre un espacio de Banach.

En la expresión 4.4 y con las notaciones anteriores se observa que si $q \rightarrow 1$ entonces dicha derivada es de la forma $w - E_{p_2}[w]$ con $w = 1 - DK_{p_1}(u)v \in \mathcal{V}_{q,p_1}$, lo cual coincide con la expresión obtenida por Pistone y Sempi.

Ahora se construirá la estructura de variedad tangente, en la cual se prueba que la noción de vector tangente coincide con una q -deformación del concepto estadístico de función score.

Dada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, una curva que pasa por p es un modelo estadístico paramétrico unidimensional:

$$\begin{aligned} g : \quad I \subset \mathcal{R} &\rightarrow \mathfrak{M}_\mu \\ t &\rightarrow g(t) \end{aligned}$$

donde $g(t_0) = p$ para algún $t_0 \in I$. Usualmente se supone que $t_0 = 0$; sin embargo esta consideración no es necesaria en este trabajo.

Sean $(\mathcal{U}_{q,p_1}, \sigma_{q,p_1})$ y $(\mathcal{U}_{q,p_2}, \sigma_{q,p_2})$ dos cartas para $p \in \mathfrak{M}_\mu$; entonces

$$g(t) = \varepsilon_{q,p_1}(u_1) = e_q^{u_1 \ominus_q K_{p_1}(u_1)} p_1,$$

donde para cada $t \in I$ se tiene

$$u_1(t) = \sigma_{q,p_1}(g(t)).$$

Así mismo

$$g(t) = \varepsilon_{q,p_2}(u_2)$$

para

$$u_2(t) = \sigma_{q,p_2}(g(t)).$$

Las variables aleatorias $u_1(t_0)$ y $u_2(t_0)$ están conectadas por la relación

$$u_2(t_0) = (\sigma_{q,p_2} \circ \varepsilon_{q,p_1})(u_1(t_0)).$$

Teniendo en cuenta que $u_1(t_0) = \sigma_{q,p_1}(p)$ y la regla de la cadena, se sigue que

$$u_2'(t_0) = (\sigma_{q,p_2} \circ \varepsilon_{q,p_1})'(u_1(t_0)) \cdot u_1'(t_0)$$

lo cual equivale a

$$u_2'(t_0) = (\sigma_{q,p_2} \circ \varepsilon_{q,p_1})'(\sigma_{q,p_1}(p)) \cdot u_1'(t_0).$$

La expresión anterior es una relación de equivalencia y satisface los requisitos expuestos en la sección 2.3.2; por tanto el espacio tangente de \mathfrak{M}_μ en el punto p será

$$\mathcal{T}_p(\mathfrak{M}_\mu) = \{[(\mathcal{U}_{q,p}, \sigma_{q,p}, u')]: p \in \mathfrak{M}_\mu\}.$$

Este es un espacio vectorial topológico y tiene la misma topología que cualquiera de los espacios $L^\Psi(z \cdot \mu)$, tales que $p \in \mathcal{U}_{q,z}$.

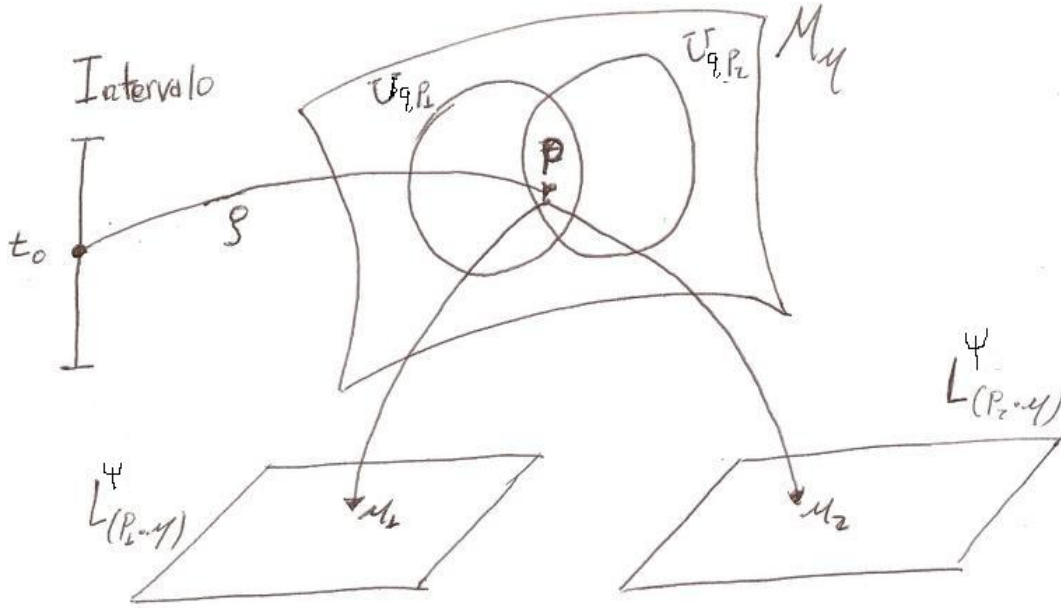


Figura 4.1:

Proposición 4.1.2. Sea $g(t)$ una curva regular en \mathfrak{M}_μ con $g(t_0) = p$, y $u(t) \in \mathcal{V}_z$ su representación coordinada bajo $\sigma_{q,z}$. Entonces $g(t) = e_q^{[u(t) \ominus_q K_z(u(t))]} z$ y además:

1. $\frac{d}{dt} \ln_q \left(\frac{g(t)}{p} \right)_{t=t_0} = T u'(t) - Q E_p[u'(t)]$ para algunas constantes T y Q .
2. Si $z = p$, i.e. si las cartas están centradas en el mismo punto entonces los vectores tangentes estarán representados por la función score q -deformada en t .
3. considerando el modelo exponencial bi-dimensional paramétrico

$$f(t, q) = e_q^{(tu \ominus_q K_p(tu))} p \quad (4.5)$$

es claro que cualquier modelo exponencial unidimensional de la forma $e^{(tu - K_p(tu))} p$ se obtiene de 4.5 al hacer $q \rightarrow 1$; o en general si q es fijo.

La función score q -deformada de cualquier modelo uni-dimensional 4.5 con $0 < q < 1$ fijo, en $t = t_0$, es un elemento del subespacio generado por $u \in \mathcal{V}_{q,p}$.

Demostración. 1.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \ln_q \left(\frac{g(t)}{p} \right)_{t=t_0} &= \frac{d}{dt} \ln_q \left[\frac{e_q^{[u(t) \ominus_q K_z(u(t))]} z}{e_q^{[u(t_0) \ominus_q K_z(u(t_0))]} z} \right]_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{[u(t) - K_z(u(t))] \left[\frac{1+(1-q)K_z(u(t_0))}{1+(1-q)K_z(u(t))} \right] - [u(t_0) - K_z(u(t_0))]}{[1 + (1-q)K_z(u(t_0))]} \right]_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{u(t) - K_z(u(t))}{1 + (1-q)K_z(u(t))} \right]_{t=t_0} \\
&= \frac{1}{[1 + (1-q)K_z(u(t_0))]} u'(t_0) - \frac{[1 + (1-q)u(t_0)]}{[1 + (1-q)K_z(u(t_0))]^2} \left(\frac{d}{dt} K_z(u(t_0)) \right) \\
&= T u'(t_0) - Q \left(\frac{d}{dt} K_z(u(t_0)) \right) \tag{4.6}
\end{aligned}$$

en donde

$$T = \frac{1}{[1 + (1-q)K_z(u(t_0))]} \quad \text{y} \quad Q = \frac{[1 + (1-q)u(t_0)]}{[1 + (1-q)K_z(u(t_0))]^2}.$$

Ahora, de la sección 3.3.3 se tiene que

$$\frac{d}{dt} K_z(u(t)) = E_{g(t)}[u'(t)].$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \ln_q \left(\frac{g(t)}{p} \right)_{t=t_0} = T u'(t_0) - Q E_{g(t_0)}[u'(t_0)].$$

2. Si $z = p$ entonces $E_p[u'(t_0)] = E_z[u'(t_0)]$; como $u(t)$ es una variable aleatoria centrada y por tanto $E_p[u'(t_0)] = E_z[u'(t_0)] = 0$ se tiene

$$\frac{d}{dt} \ln_q \left(\frac{g(t)}{p} \right)_{t=t_0} = T u'(t_0).$$

3. Si tomamos $u(t) = tu$ en el numeral (1) se sigue directamente que

$$\frac{d}{dt} \ln_q \left(\frac{f(t)}{p} \right)_{t=t_0} = Tu$$

□

La proposición anterior muestra que el espacio tangente $T_p(\mathfrak{M}_\mu)$ está representado por el espacio de las funciones score q -deformadas o bien por el espacio de los modelos paramétricos q -exponenciales uni-dimensionales 4.5.

El modelo \mathfrak{M}_μ junto con la colección de todos los espacios tangentes se denomina el haz tangente y lo denotamos por $\mathcal{T}(\mathfrak{M}_\mu)$. Así,

$$\mathcal{T}(\mathfrak{M}_\mu) := \left\{ (f, u) : f \in \mathcal{U}_{q,p} \subset \mathfrak{M}_\mu \text{ y } u \text{ es la clase de los vectores tangentes a } f \right\}$$

Este espacio es una variedad en la cual un atlas estará definido por las funciones $(g, u) \in \mathcal{T}(\mathcal{U}_p) \rightarrow (\sigma_{q,p}(g), A(u) - B(u)E_p[A(u)])$, las cuales se definen en el subconjunto abierto $\mathcal{U}_{q,p} \times \mathcal{V}_{q,p}$ de $\mathfrak{M}_\mu \times L^\Psi(p \cdot \mu)$.

Las funciones de transición estarán dadas por:

$$(u_1, v_1) \in \mathcal{V}_{q,p} \times L^\Psi(p \cdot \mu) \rightarrow ((\sigma_{q,z} \circ \varepsilon_{q,p})(u_1), A(v_1) - B(v_1)E_z[A(v_1)]) \in \mathcal{V}_{q,z} \times L^\Psi(z \cdot \mu).$$

Es de esperar que una definición explícita del haz tangente sea importante para el cálculo de aproximaciones de modelos estadísticos paramétricos y en el modelo exponencial de Pistone y Sempi.

4.2. Entropía relativa

En general, las f -divergencias se definen en la forma:

$$I(p||q) = \sum_k q_k f\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$$

donde f es una función convexa, definida para $x > 0$ y estrictamente convexa en $x = 1$. La razón $\frac{p_k}{q_k}$ puede ser interpretada como la derivada discreta de Radon-Nikodym de la densidad p con respecto a la densidad q . En el contexto de Tsallis y usando la deformación 2.16, se obtiene:

$$I(p||q) = \frac{1}{\kappa} \int p_k \left(\left(\frac{p_k}{q_k} \right)^\kappa - 1 \right). \quad (4.7)$$

En esta sección se probará cómo la noción de entropía relativa de Tsallis está relacionada con la noción de variedad q -exponencial. Para ello partimos de la siguiente definición de q -divergencia.

Definición 4.2.1. (q -divergencia)

Sean las densidades de probabilidad p y z en \mathfrak{M}_μ . Si $\left(\frac{z}{p}\right) \ln_q \left(\frac{p}{z}\right)$ es $p \cdot \mu$ -integrable, entonces la q -divergencia de z respecto a p es el número

$$I_q(z||p) = \int \left(\frac{z}{p}\right) \ln_q \left(\frac{p}{z}\right) p d\mu = E_z \left[\ln_q \left(\frac{p}{z}\right) \right].$$

Esta divergencia es de la forma (30) en [17] para el caso de funciones de densidad continuas; por lo tanto respecto a esta divergencia se tienen las siguientes propiedades:

(I) $I_q(z||p) \geq 0$ y $I_q(z||p) = 0$ implica $z = p$,

(II) $I_q(z||p)$ es convexa en z y p .

Proposición 4.2.1. Sean $p \in \mathfrak{M}_\mu$, $z \in \mathcal{U}_{q,p}$ y u la representación coordinada de z bajo $\sigma_{q,p}$. Además sea *u dado por ${}^*u = \frac{z}{p} - 1$ y

$$H_p({}^*u) = E_p \left[(1 + {}^*u) \ln_q \left(\frac{1}{1 + {}^*u} \right) \right]$$

Entonces

$$1. I_q(p||z) = \frac{-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)}$$

$$2. H_p({}^*u) = I_q(z||p)$$

$$3. E_z[u] = I_q(p||z) + I_q(z||p) = (1 + (1-q)K_p(u))H_p({}^*u) + K_p(u)$$

Demostración. Por la definición anterior se sigue:

$$1. I_q(p||z) = E_p \left[\ln_q \left(\frac{z}{p} \right) \right].$$

Como $z = e_q^{\left[\frac{u-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} \right]} p$, se tiene

$$\begin{aligned} I_q(p||z) &= E_p \left[\ln_q \left(\frac{p}{z} \right) \right] \\ &= \left(E_p \left[\frac{u - K_p(u)}{1 + (1-q)K_p(u)} \right] \right) \\ &= \left(\frac{E_p[u] - K_p(u)}{1 + (1-q)K_p(u)} \right) \\ &= -\frac{K_p(u)}{1 + (1-q)K_p(u)}. \end{aligned}$$

$$2. H_p({}^*u) = E_p \left[(1 + {}^*u) \ln_q \left(\frac{1}{1 + {}^*u} \right) \right] = E_p \left[\left(\frac{z}{p} \right) \ln_q \left(\frac{p}{z} \right) \right] = I_q(z||p)$$

$$3. I_q(z||p) = E_z \left[\frac{u-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} \right] = \frac{E_z[u]-K_p(u)}{1+(1-q)K_p(u)} \text{ y como } E[\cdot] \text{ es una transformación lineal entonces,}$$

$$E_z[u] = (1 + (1-q)K_p(u))H_p({}^*u) + K_p(u).$$

□

Es de observar que el valor del mapeo coordinado $\sigma_{q,p}(z)$ definido en 3.18 está dado por

$$\sigma_{q,p}(z) = \left(\frac{1}{1 + (q-1)I_q(p||z)} \right) \left(\ln_q \left(\frac{z}{p} \right) - I_q(p||z) \right).$$

Por tanto, la conexión entre el atlas de la variedad de información q -exponencial y la importante noción de divergencia es explícita y natural, en el sentido de que la representación coordinada de la densidad $z \in \mathcal{U}_{q,p}$ contiene la información relativa de la densidad p respecto a z . Además es claro que si $\sigma_{q,p}(z) = u$ entonces

$$E_z[u] = \left(\frac{1}{1 + (1 - q)I_q(p||z)} \right) (D_q(z||p) - I_q(p||z)) ,$$

en donde $E_z \left[\ln_q \left(\frac{z}{p} \right) \right] = D_q(z||p)$ es la q -deformación del funcional de entropía relativa de Kullback-Leibler, caracterizado en [12].

Conclusiones

Se ha construido la variedad de información q -exponencial no paramétrica de dimensión infinita, en la cual el mapeo coordenado evaluado en una densidad z , perteneciente a una vecindad de p , contiene la información relativa de p respecto a z en la forma

$$\sigma_{q,p}(z) = \left(\frac{1}{1 + (q-1)I_q(p||z)} \right) \left(\ln_q \left(\frac{z}{p} \right) - I_q(p||z) \right).$$

Este valor, es, de hecho, una variable aleatoria u la cual tiene esperanza cero respecto a la medida de probabilidad $(p \cdot \mu)$ y pertenece a un espacio de Banach. Las variables aleatorias de este espacio poseen dos propiedades importantes a saber:

1. $E_p[e_q^{tu}] < \infty$ para $t \in \mathbb{R}$.
2. $E_p[\Phi_1(\alpha u)] < \infty$ para algún α .

Este par de propiedades caracterizan los elementos del espacio de coordenadas y por tanto a las densidades $z = \varepsilon_{q,p}(u)$.

La variedad es dotada de una topología de espacio de Orlicz inducida por el atlas la cual es equivalente a la topología de la e -convergencia; las características generales de estos espacios y su topología inducida por las normas de Orlicz y de Luxemburgo se encuentran bien desarrolladas en [24]. Esta topología en la variedad q -exponencial permite que las densidades en una vecindad de p tengan entropía finita, lo cual no es logrado con la norma de traza, (ver [26]), y es una condición de gran importancia al considerar dichas densidades como estados normales en cierta configuración.

Uno de los logros relevantes de esta construcción es ver como el espacio tangente de la variedad, $\mathcal{T}(\mathfrak{M}_\mu)$ está identificado con los modelos paramétricos uni-dimensionales, como se demostró en la Proposición 4.1.1 (3) y que este espacio porta en sí las funciones score y su q -deformación, es decir, que los elementos del espacio tangente dan cuenta de estas dos importantes relaciones que se tienen entre densidades de probabilidad.

Es de esperar que estas propiedades sean la base para una formulación de la termoestadística generalizada de Tsallis, en el caso de las q -deformaciones, puesto que el funcional de entropía relativa definido en 4.7 corresponde a una deformación en el caso de las f -divergencias.

Uno de los aspectos geométricos que no se desarrollan en este trabajo es el relacionado con los α -embebimientos de Amari o embebimientos en subespacios de \mathbb{R}^n ; este es un tópico de gran importancia al desarrollar métricas Riemmanianas y en particular métricas de Fisher.

La variedad es en sí una generalización del modelo geométrico presentado por Pistone y Sempi [21] en el caso límite $q \rightarrow 1$; y se espera sirva como modelo geométrico para caracterizar sistemas no extensivos.

Problemas abiertos

Dado que la variedad de información q -exponencial está modelada sobre espacios de Banach, se deben desarrollar algunos tópicos adicionales, los cuales se espera sirvan para obtener resultados generales en el contexto de la física estadística y en la termoestadística no extensiva de Tsallis; algunos de estos son:

1. Identificar y caracterizar los elementos del espacio dual $[L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)]^*$ de $L^{\Phi_1}(p \cdot \mu)$, así como aquellos pertenecientes a un espacio de Orlicz $L^\Psi(p \cdot \mu)$ en el cual Ψ sea una N-función que cumple la condición Δ_2 y que además sea equivalente con Φ_1 , tal como se desarrolla en [12].
2. Caracterizar las subvariedades y embebimientos con el fin de generalizar los conceptos de métricas de información de Fisher y métricas Riemmanianas, los cuales son tal vez, uno de los items más importantes en la teoría de las variedades de información tal como se desarrolla en [1]. De igual manera relacionar la variedad q -exponencial con los α -embebimientos de Amari y el Haz de Hilbert.
3. Los mapeos coordenados de la variedad de información q -exponencial están directamente relacionados con el concepto de f -divergencias o entropía relativa, como se demostró en la sección 4.2; por tanto es de esperar que en la variedad se cumplan condiciones propias de la física estadística y la termoestadística no extensiva de Tsallis, tales como el principio variacional, el principio de máxima entropía, condición de estabilidad de Lesche, entre otros. Es entonces un trabajo plantear este tipo de resultados en términos de la variedad de información q -exponencial y analizar si generalizan o son expresiones equivalentes, a las que se encuentran en la termoestadística no extensiva de Tsallis, los cuales se encuentran desarrollados en [18].
4. Una de las aplicaciones de las variedades de información, a la física cuántica, se encuentra en [26]. Un resultado análogo al planteado en dicho trabajo se puede realizar con la variedad de información q -exponencial.

Bibliografía

- [1] A. Cena: *Geometric Structures on the non-parametric statistical manifold*. Tesi di Dottorato. Dottorato in Matematica, Università di Milano. Eguchi, S. (2005)
- [2] A. Cena and G. Pistone: *Exponential statistical manifold*. Annals of the Institute of Statistical Mathematics. ISSN 0020-3157 (Print) 1572-9052 (Online) 59, Pag 27-56 (2006).
- [3] Anna Jencová: *A construction of a nonparametric quantum information manifold*. Journal Of Functional Analysis, 239, 1-20, 2006.
- [4] Borges, E.P.: *Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas não-extensivos*. Tese de Dutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro (2004).
- [5] Borja, R.: *Aspectos matemáticos en termoestadística generalizada*. Tesis de maestría, Universidad EAFIT. Medellín (2010).
- [6] C. R. Rao: *Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters*. Bull. Calcutta Math. Soc. 37 (1945) 81-91
- [7] Ernst, T: *The History of q -Calculus and a New Method*. U. U. D. M. Report 2000:16, ISSN 1101-3591, Department of Mathematics, Uppsala University, 2000.
- [8] G. Kaniadakis. Physica A 296,405 (2001).
- [9] G. Kaniadakis. Physics Letters A 288, 283 (2001).
- [10] G. Kaniadakis. Physical Review E 66, 056125 1 (2002).
- [11] G. Kaniadakis. Physical Review E 72, 036108 1 (2005).
- [12] G. Pistone and Rogantin: *The exponential statistical manifold: parameters, orthogonality and space transformations*. Bernoulli. N° 4, pag 721-760 (1999)
- [13] H. Jeffys: *An invariant form of the prior probability in estimation problems*. Proc. Roy. Soc. London Ser. A 186 (1946) 453-461.
- [14] Kulback, S y Leibler, R.A. *On Information and Sufficiency*. Annals of Mathematics and Statistics. Vol 22. pag 79-86. (1951).
- [15] Lang, Serge.: *Differential Manifolds*. Springer verlang. New York, 1985.

- [16] Moyano, L.: *Mecânica estatística não-extensiva em sistemas complexos: fundamentos dinâmicos e aplicações*. Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro (2006)
- [17] Naudts, Jan.: *Continuity of a class of entropies and relative entropies*. Rev. Math. Phys. Volumen 16 N° 6, pag 809-822 (2004)
- [18] Naudts, J: *Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatics*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications Volume 316, Issues 1-4, (2002) pp 323-334.
- [19] Naudts, Jan.: *Estimators, escort probabilities, and ϕ -exponential families in statical physics*. Journal of inequalities in pure and applied Mathematics., Vol. 5., Article 102, (2004). pp., 1-15.
- [20] Naudts, J: *The q -exponential family in statistical physics*. Journal of Physics: Conference Series 201, (2010)
- [21] Pistone, Giovanni and Sempi, Carlo.: *An infinite-dimensional geometric structure on the space of all the probability measures equivalent to a given one*. The annals of statistics., Vol. 23., No. 5., (1995). pp.2, 1543–1561.
- [22] Pistone, Giovanni: *K-exponential models from the geometrical viewpoint*. The European Physical Journal B. Springer Berlin. ISSN 1434-6028 (Print) 1434-6036 (Online) 70, Pag 29-37 (2009)
- [23] Rao, M. M. y Ren, Z.D.: *Aplication of Orlicz spaces*. Marcel Dekker Inc. 2002.
- [24] Rao, M.M. and Ren, Z.D.: *Theory of Orlicz Spaces*. Marcel Dekker Inc. New York, N.Y. 1991.
- [25] R. Abraham., J.E. Marsden and T. Ratiu.: *Manifolds, tensor Analysis and applications*. Second edition. Springer verlag. New York, 1988.
- [26] R. F. Streater: *Quantum Orlicz spaces in information geometry*. Open systems & information dynamics. Vol 11. N0. 4 (2002), 359-375.
- [27] S. I. Amari: *Differential-Geometric methods in Statistics*. Berlin, Springer-Verlag, 1985 (Lectures Notes in statistics, vol. 28)
- [28] S. I. Amari and Nagaoka: , *Methods of Information Geometry*. Amer .Math.Soc. Providence, R.I., translated from Japanese by D. Harada, 1993
- [29] Tsallis, C.: *Nonextensive statistical mechanics: A brief review of rts present status*. Annals of the Brazilian Academy of Sciences Vol 74, 393-414 (2002)
- [30] Tsallis, C.: *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*. J.Stat. Phys.52, 479-487 (1988)
- [31] Upmeyer, H. *Symmetric Banach Manifolds an Jordan C^* -Algebras*. N° 104 en North-Holland Mathematics Studies, North-Holland Publishing Co.Amsterdam. (1985).

- [32] Young. W.H. *On classes of summable functions and their Fourier series*. Proc. Roy. Soc. 87 (1912), 225-229.